Série A, n° 2202.

N° d'ordre : 3073.

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE ALLARD

INGÉNIEUR HYDROGRAPHE DE LA MARINE

1re THÈSE. — *La projection conforme de déformation stationnaire le long d'une courbe.*

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 juin 1948 devant la Commission d'examen.

MM. VALIRON... *Président.*
COULOMB.. } *Examinateurs.*
FAVARD... }

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

1948

Série A, n° 2202.

N° d'ordre : 3073.

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES-MATHÉMATIQUES

PAR

PIERRE ALLARD

INGÉNIEUR HYDROGRAPHE DE LA MARINE.

1re THÈSE. — ***La projection conforme de déformation stationnaire le long d'une courbe.***

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 juin 1948 devant la Commission d'examen.

MM. VALIRON... *Président.*
COULOMB.. } *Examinateurs.*
FAVARD... }

PARIS
IMPRIMERIE NATIONALE

1948

J. C. 703395. — M. ALLARD.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

Doyen..... M. J. CABANNES.

PROFESSEURS.

L. BLARINGHEM	T	Botanique.
G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
C. MAUGUIN	T	Minéralogie.
A. DENJOY	T	Théorie des Fonctions.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et géologie dynamique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.
Robert LÉVY	T	Physiologie comparée.
Henri VILLAT	T	Mécanique des fluides et applications.
Bh. JACOB	T	Géologie
P. PASCAL	T	Chimie générale.
M. FRÉCHET	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
Mme RAMART-LUCAS..	T	Chimie organique.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.
JOB	T	Chimie générale.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
VILLEY	T	Mécanique appliquée.
COMBES	T	Physiologie végétale.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.
HACKSPILL	T	Chimie minérale.
LAUGIER	T	Physiologie générale.
TOUSSAINT	T	Technique Aéronautique.
M. CURIE	T	Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CHAZY	T	Mécanique analytique.
H. GAULT	T	Chimie appliquée.
CROZE	T	Physique théorique et physique céleste.
DUPONT	T	Théories chimiques.
VALIRON	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
BARRABÉ	T	Géologie structural et géologie appliquée.
VAVON	T	Analyse et mesures chimiques.
G. DARMOIS	T	Mathématiques générales.
Jacques BOURCART ..		Géologie physique et géologie dynamique.
AUBEL	T	Chimie biologique.
Mme JOLIOT-CURIE...	T	Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL	T	Botanique.
CABANNES	T	Recherches physiques.
GRASSÉ	T	Zoologie (évolution des êtres organisés).
PREVOST		Chimie organique.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
CHAUDRON	T	Chimie.
WYART		Minéralogie.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végétale.
P. AUGER	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER		Physiologie générale.
PIVETEAU		Géologie.
ROCARD	T	Physique.
H. CARTAN		Calcul différentiel.
SCHAEFFER	T	Physiologie des fonctions.
LAFFITTE		Chimie (P. C. B.).
FAVARD		Calcul des probabilités et Physique-Mathématique.
COULOMB	T	Physique du globe.
Mlle COUSIN		Biologie animale (P. C. B.).
CHRÉTIEN		Analyse et mesures chimiques.
DRACH		Évolution des êtres organisés.
KASTLER		Physique.
CHATELET	T	Arithmétique et théorie des nombres.
EPHRUSSI	T	Génétique.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
BAUER	T	Chimie-Physique.
RIVIÈRE		Géologie (P. C. B.).
GAUTHERET		Biologie végétale (P. C. B.).
LUCAS		Physique.
Max MORAND		Physique.
ARNULF		Optique appliquée.
A. THOMAS		Zoologie.
SOLEILLET		Physique.
FORTIER		Mécanique expérimentale des fluides.
DANJON	T	Astronomie.
FROMAGEOT		Chimie biologique.
LAPORTE		Physique générale et Radioactivité.
QUESNEY		Météorologie et Physique de l'atmosphère.

Secrétaire..... Ch. MONIER.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

PREMIÈRE THÈSE

LA PROJECTION CONFORME

DE

DÉFORMATION STATIONNAIRE LE LONG D'UNE COURBE

Il existe de nombreuses représentations conformes de la surface de la terre sur le plan : les plus anciennement connues sont la projection stéréographique et la projection de Mercator. L'intérêt des projections conformes qui conservent les angles n'a échappé ni aux cartographes ni aux utilisateurs depuis l'époque où la sphéricité de la terre a été mise en évidence. Ces deux projections, en particulier celle de Mercator, sont encore maintenant les seules utilisées pratiquement pour la navigation maritime, la projection stéréographique étant réservée aux régions polaires et la projection de Mercator étant étendue à la représentation plane de tout le reste de la surface terrestre.

La projection de Mercator possède la propriété de transformer la loxodromie en une droite, propriété qui est appréciée dans la navigation au compas parce que les routes maritimes à cap constant sont représentées par des droites : cela explique l'usage quasi-universel de cette projection malgré la déformation qu'elle produit surtout pour les hautes latitudes.

Les recherches faites par les mathématiciens en vue de trouver la meilleure représentation pour une portion restreinte de la terre ont abouti à la découverte par Gauss de la projection conforme qui porte son nom et qu'il adopta pour la construction de la Carte du Hanovre. Cette projection est utilisée actuellement par l'Institut Géographique National pour ses travaux géodésiques en Afrique Occidentale Française et en Afrique Équatoriale Française. D'autre part, Lambert a trouvé une généralisation de la projection de Mercator, projection conforme basée sur un parallèle de latitude quelconque à la place de l'équateur. Cette projection, tombée dans l'oubli pendant de nombreuses années est utilisée de façon très courante depuis la première guerre mondiale, en France où l'Institut Géographique National a adopté des systèmes Lambert pour le territoire national, en Afrique du Nord, au Levant et en Indochine, et par divers pays étrangers, en particulier les États-Unis d'Amérique. Enfin pour la

cartographie aérienne, la projection conforme de Lambert a supplanté dans bien des cas la projection de Mercator.

Parmi ces quatre projections conformes, la projection stéréographique est *centrale*, c'est-à-dire que le rapport de similitude entre la surface terrestre et la projection plane est égal à l'unité au centre et croît quand on s'éloigne de ce point dans toutes les directions. Par contre, dans les trois autres projections, le rapport de similitude qui conserve une valeur constante, égale en principe à l'unité, pour tous les points de la courbe de base (équateur pour la projection de Mercator, parallèle pour la projection de Lambert, méridien pour la projection de Gauss) est minimum sur la courbe et croît quand on s'en éloigne dans une direction quelconque.

Nous nous proposons de montrer dans ce travail que, plus généralement, il existe *une* projection conforme et une seule dont le rapport de similitude présente une valeur stationnaire constante pour tous les points d'une courbe qui joue le rôle de courbe de base de la projection ; la surface étant analytique, la condition exigée pour la courbe est seulement qu'elle soit analytique au sens donné par Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles. Les projections classiques de Mercator, de Gauss, et de Lambert sont des cas particuliers de la projection générale ; la courbe de base étant donnée, la condition que le rapport de similitude soit stationnaire sur cette courbe entraîne l'*unicité* de la solution. Il n'y a donc pas de projection conforme autre que les projections classiques de Mercator, Gauss et Lambert, satisfaisant aux conditions imposées précédentes sur leurs courbes de base respectives.

La considération de la projection conforme de déformation stationnaire, construite en prenant comme courbe de base la loxodromie, conduit à des résultats théoriques nouveaux, concernant en particulier le calcul de la correction de Givry dont l'expression classique est relative à la sphère [1] et la différence de longueur entre les arcs de loxodromie et de géodésique ayant mêmes extrémités.

Certaines projections générales construites par la méthode développée dans ce mémoire sont intéressantes pour la navigation aérienne moderne. Le problème de la navigation aérienne consiste à passer d'un aérodrome au suivant par le chemin le plus court : le parcours théorique est la géodésique qui joint les deux points. Or, sur la projection de Mercator, la géodésique est représentée par une courbe qui, dès qu'on s'éloigne de l'équateur, présente une courbure non négligeable. D'autre part, à un instant quelconque de sa navigation, l'avion peut recevoir sur sa position des renseignements donnés par des radiophares ou d'autres appareils modernes de détection ou de navigation. Ces renseignements se ramènent en général à des positions par azimut et distance. Pour pouvoir les re-

[1] Givry. — Mémoire sur l'emploi des chronomètres à la mer. Supplément (p. 143, Paris 1846. Extrait des *Annales Maritimes et Coloniales*).

Bravais. — Thèse d'Astronomie sur les méthodes employées dans les levés sous voiles. (Lyon, 1937.)

porter brutalement sans risquer de commettre une erreur sur une carte, il faut que la projection employée n'exige aucune correction importante. Ce n'est pas le cas de la projection de Mercator où il faut faire subir aux azimuts la correction de Givry avant de les reporter sur la carte et où les variations d'échelle en fonction de la latitude rendent difficile un report très précis de la distance. La navigation aérienne mondiale serait facilitée par l'emploi de cartes dressées dans un système conforme généralisé de déformation stationnaire. Il conviendra de choisir comme courbe médiane une géodésique; de cette façon, pour une bande de 1.000 kilomètres de part et d'autre de la géodésique, la correction finie entre la géodésique et sa corde en projection et les variations d'échelle pourront être négligées. La route à suivre pour atteindre la destination sera pratiquement représentée en projection par une droite et tous les renseignements qui parviendront au navigateur à partir des stations terrestres pourront être reportées brutalement sur la carte : ce qui évite les risques d'erreur. De plus, les appareils de détection, comme le Radar, donnent au navigateur en coordonnées polaires sur un écran lumineux une image de la terre qui correspond exactement à la projection azimutale centrée sur ce point. Il y a donc intérêt à avoir sous les yeux, à bord, une projection qui se rapproche le plus possible de la projection azimutale; or il est évidemment impossible d'adopter la projection azimutale elle-même, car son point origine (position de l'avion ou du bateau) est par essence variable. La projection conforme de déformation stationnaire qui a été définie répondra bien à la spécification imposée ci-dessus si on l'utilise au voisinage de la courbe de base. Il faudrait en principe fournir au navigateur une projection de déformation stationnaire basée sur la géodésique qu'il doit parcourir, ce qui exigerait la construction d'un très grand nombre de cartes aériennes. Nous verrons qu'on peut en réalité se contenter d'un nombre beaucoup plus restreint de cartes tout en conservant les avantages de ce système de projection.

L'étude présentée permet aussi de donner une définition mathématique à la projection par rabattement de triangles, projection la mieux adaptée aux levés de zones côtières allongées : ce qui est le cas le plus fréquent dans les travaux hydrographiques. Pour cette application, il conviendra d'étudier la projection générale dans le cas où la courbure géodésique de la courbe de base est une fonction quelconque de l'arc.

Nous avons utilisé les résultats de la théorie générale des surfaces exposés par M. Jean Laborde dans le *Traité des Projections des Cartes géographiques* [1]. Le lecteur pourra se reporter facilement à cet ouvrage dont les notations et les conventions de signe ont été conservées. Toutefois,

[1] Traité des Projections à l'usage des cartographes et des géodésiens par L. Driencourt, ingénieur hydrographe en chef et J. Laborde, lieutenant-colonel — Paris 1930 (4e fascicule).

il nous a paru utile de préciser le sens de certaines notations introduites par cet auteur, d'en dégager le caractère invariant et d'établir les équations fondamentales par une voie légèrement différente.

Les projections conformes de déformation stationnaire, basées sur une géodésique, sont une généralisation des projections de Mercator obliques que M. L. Kahn a étudiées sur la sphère en vue de la construction de cartes aéronautiques pour les premières traversées de l'Atlantique[1].

La méthode exposée dans le présent mémoire s'écarte de la méthode classique, par laquelle, depuis les travaux de Gauss, on aborde généralement l'étude des problèmes relatifs aux projections conformes : la représentation d'une surface sur une autre ou sur un plan se ramène à une correspondance par fonction analytique entre les coordonnées paramétriques isométriques des deux surfaces ou de la surface et du plan; ainsi, si λ et τ désignent les paramètres d'un réseau orthogonal isométrique de la première surface, x et y les paramètres d'un réseau orthogonal isométrique de la deuxième surface — qui se réduit, par exemple, dans le cas du plan aux coordonnées cartésiennes ordinaires — toutes les projections conformes sont définies par la relation fonctionnelle :

$$x + iy = \mathrm{F}(\lambda + i\tau)$$

F étant une fonction analytique.

Le problème étant ainsi résolu globalement au point de vue mathématique, il y a lieu dans les cas particuliers d'adapter la solution aux conditions aux limites; le procédé classique d'établissement des formules de la projection de Gauss que nous reprendrons est une illustration de cette adaptation de la solution générale à un cas particulier.

La méthode que nous développons procède d'un point de vue différent : nous considérons comme fonction essentielle dans la représentation conforme le module de la dérivée de la fonction analytique F :

$$\mathrm{K} = \mathrm{mod}\,(\mathrm{F}') = \left| \frac{d(x+iy)}{d(\lambda+i\tau)} \right|.$$

Nous verrons que la connaissance de cette fonction suffit pour déterminer tous les éléments de la représentation conforme, en particulier les images des courbes fondamentales : méridiens et parallèles.

Une fois établie l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la fonction K, pour que la projection soit conforme, les conditions aux limites étant données sur la courbe de base, la représentation conforme est construite au voisinage de cette frontière.

Ce procédé présente l'avantage de fournir une définition commune et plus générale à diverses projections conformes classiques et de mettre en

[1] «Nouvelles Cartes Aériennes», *Bulletin de l'Association Technique Maritime et Aéronautique* (1928), par M. L. Kahn, ingénieur du génie maritime. Comptes-rendus à l'Académie des Sciences, 186, 1928, p. 496. — 187, 1928, p. 284. — 188, 1929, p. 775.

évidence, grâce à des formules intrinsèques, l'influence des caractères géométriques de la surface et des courbes de base adoptées, sur la structure de diverses projections conformes.

I. — UNICITÉ DE LA SOLUTION ET CALCUL DES ÉLÉMENTS DE LA PROJECTION.

Les propriétés démontrées dans ce chapitre étant générales, nous supposons quelconques la surface (Σ) et la courbe de base $(\mathcal{L})$ tracée sur cette surface.

La famille de projections conformes qui fait l'objet de cette étude est caractérisée par les deux propriétés suivantes :

1. Le rapport de similitude est égal à l'unité en tous les points de la courbe de base $(\mathcal{L})$.

2. Le gradient de ce rapport est nul pour tous les points de cette même courbe $(\mathcal{L})$.

Supposons tracées sur la surface (Σ) deux familles de courbes orthogonales; les points de la surface peuvent alors être définis par deux coordonnées curvilignes : u pour les courbes de la première famille et v pour celles de la deuxième famille.

Dans ces conditions, le carré de l'élément linéaire de la surface ne contient pas de terme rectangle; avec les notations classiques de la théorie des surfaces il se réduit à :

$$E du^2 + G dv^2$$

ou si on pose :

$$E = \mu^2 \text{ et } G = \nu^2,$$

il devient :

$$\mu^2 du^2 + \nu^2 dv^2$$

expression dans laquelle μ et ν sont des fonctions de u et de v. L'élément linéaire pour les courbes de la première famille définies par $v = C^{te}$ est :

$$ds = \mu(u, v)\, du.$$

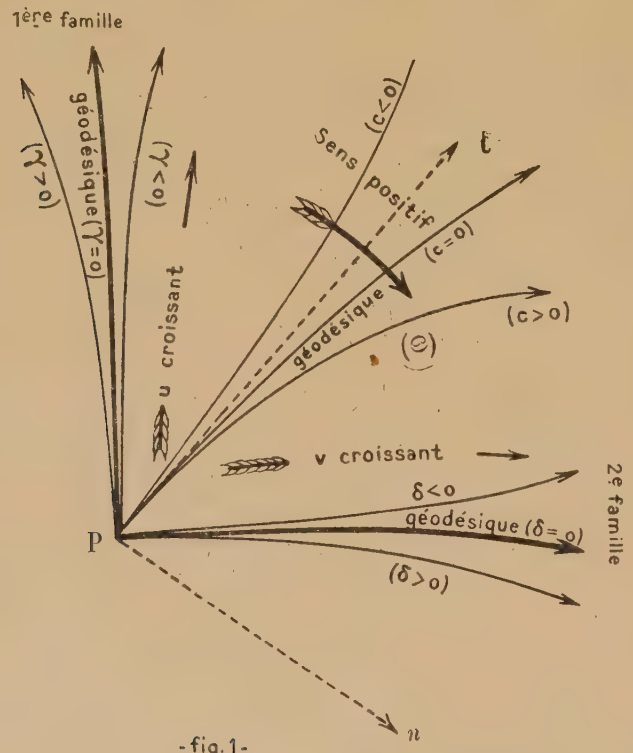
Pour les courbes de la deuxième famille qui correspondent à des valeurs constantes du paramètre u, on a de même :

$$dt = \nu(u, v)\, dv.$$

Les fonctions μ et ν étant positives, le sens positif pour les arcs est celui des u croissant pour les courbes de la première famille et celui des v croissant pour les courbes de la deuxième famille.

Considérons un point P de la surface (Σ), il passe par ce point deux courbes orthogonales. Traçons les deux géodésiques tangentes : leur courbure géodésique est nulle. Les deux courbes orthogonales, dont la cour-

bure géodésique est en général différente de zéro, se placent par rapport aux deux géodésiques considérées, d'un côté ou de l'autre, suivant le signe de la courbure géodésique (fig. 1). Le sens positif adopté sur les normales géodésiques aux courbes des deux familles est dirigé vers la région couverte par les paramètres inférieurs; avec cette convention de signe on attribue un signe au rayon de courbure géodésique : la courbure est positive si le centre de courbure géodésique se trouve dans la région couverte



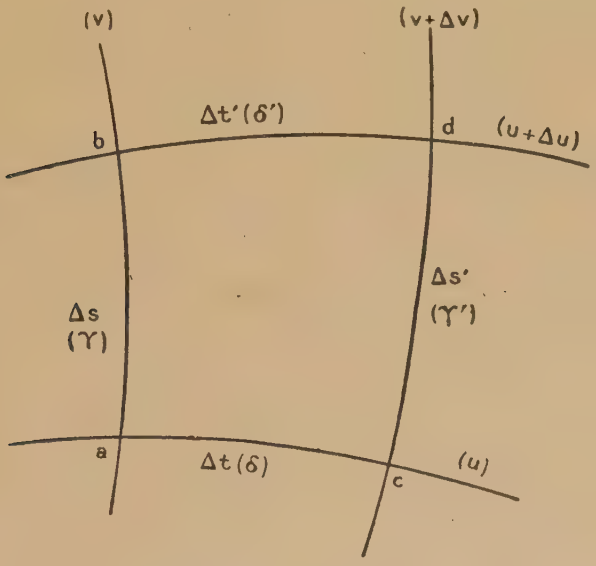
-fig. 1-

par les courbes de paramètres inférieurs, elle est négative si le centre de courbure géodésique se trouve de l'autre côté dans la région couverte par les courbes de paramètres supérieurs. Cette convention qui a l'avantage de conserver la symétrie des deux variables u et v présente un inconvénient quand on définit un sens positif de rotation sur la surface (Σ).

Ainsi, nous adopterons dans la suite comme sens positif de rotation, le sens qui amène la tangente positive aux courbes de la première famille sur la tangente positive aux courbes de la deuxième famille. Pour une courbe quelconque $(\mathcal{C})$ passant par P, choisissons un sens positif pour la mesure des arcs et pour la tangente orientée Pt; et prenons comme normale orientée Pn la droite obtenue en faisant tourner la tangente Pt

de $+\frac{\pi}{2}$. La courbure géodésique est alors positive si le centre de courbure géodésique est situé sur la partie positive de cette normale; elle est négative dans le cas contraire. On voit que cette convention n'est en accord avec la première convention qui a été faite seulement pour les courbes de la deuxième famille; pour la première famille, au contraire, les deux conventions de signe sont inverses.

Considérons sur la surface (Σ) un quadrilatère curviligne élémentaire *abcd* (fig. 2), dont les côtés sont des arcs des deux familles de courbes



- fig. 2 -

orthogonales définies ci-dessus; *ab* et *cd* appartiennent respectivement aux courbes de la première famille de paramètres v et $v+\Delta v$; ils ont pour longueurs respectives Δs et $\Delta s'$. *ac* et *bd* appartiennent aux courbes de la deuxième famille de paramètres u et $u+\Delta u$; ils ont pour longueurs respectives Δt et $\Delta t'$.

Faisons tendre vers zéro ces infiniment petits; sur la courbe de paramètre v, la différentielle de l'arc ds est donnée par :

$$ds = \mu du$$

et la variation première de cette différentielle, quand on passe de cette courbe à la courbe de paramètre infiniment voisin $v + Dv$ est donnée par la formule :

$$(1) \qquad D(ds) = ds' - ds = \frac{\partial \mu}{\partial v} du Dv.$$

De même, pour les courbes de la deuxième famille, on aurait, en appelant dv et Du les différentielles correspondantes :

$$(1') \qquad D(dt) = dt' - dt = \frac{\partial v}{\partial u} dv Du.$$

1. Expression des courbures géodésiques et de la courbure totale en fonction de μ et de v. — La connaissance du carré de l'élément linéaire : $\mu^2 du^2 + v^2 dv^2$ suffit pour calculer la courbure géodésique γ des courbes de la première famille et la courbure géodésique δ des courbes de la deuxième famille que nous avons supposées tracées sur la surface (Σ).

Par définition la courbure géodésique est la limite du quotient $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$, $\Delta\varphi$ étant l'angle infiniment petit des plans normaux à la surface (Σ) qui passent par les tangentes à la courbe de paramètre v aux deux points a et b distants de Δs. Comme le réseau est formé de deux familles de courbes orthogonales, l'angle $\Delta\varphi$ est égal à l'angle des tangentes aux courbes de paramètres u et $u + \Delta u$ qui passent par a et b. Il en résulte une expression simple de l'arc $cd = \Delta s'$ en fonction de l'arc $ab = \Delta s$ et de la courbure géodésique γ.

$$\Delta s' = \Delta s + \Delta\varphi \Delta t + \ldots = \Delta s + \gamma \Delta s \Delta t + \ldots = \Delta s + \gamma \mu v \Delta u \Delta v + \ldots$$

Pour la deuxième famille de courbes, nous aurions des résultats analogues avec la courbure géodésique δ :

$$\Delta t' = \Delta t + \Delta\Psi \Delta s + \ldots = \Delta t + \delta \Delta t \Delta s + \ldots = \Delta t + \delta \mu v \Delta u \Delta v + \ldots$$

Quand on fait tendre vers zéro les accroissements Δu et Δv et qu'on adopte les notations différentielles des formules (1) et (1') respectivement, on obtient les relations suivantes :

$$(2) \qquad D(ds) = ds' - ds = \gamma \mu v du Dv$$

$$(2') \qquad D(dt) = dt' - dt = \delta \mu v dv Du.$$

La comparaison des relations différentielles (1), (2), d'une part, et (1'), (2'), d'autre part, fournit les expressions des courbures géodésiques γ et δ en fonction de μ et v [1].

$$(3) \qquad \begin{cases} \gamma = \dfrac{1}{\mu v} \dfrac{\partial \mu}{\partial v} \\ \delta = \dfrac{1}{\mu v} \dfrac{\partial v}{\partial u}. \end{cases}$$

[1] Cf L. Bianchi. Lezioni di Geometria differenziale (2e édition). Volume I, p. 181.

Ces formules sont établies en adoptant pour la courbure géodésique la première convention de signe, c'est-à-dire que la courbure est considérée comme positive si la courbe se trouve par rapport à la géodésique du côté des paramètres inférieurs à celui qui correspond à la courbe considérée (Cf fig. 1).

La courbure totale $\frac{1}{\rho\rho'}$ de la surface (Σ) est un invariant géodésique qui peut aussi se calculer quand on connaît la forme quadratique fondamentale : $\mu^2 du^2 + \nu^2 dv^2$. Appliquons le théorème de Gauss sur les excès angulaires au quadrilatère *abcd* ; il exprime que l'intégrale de la courbure géodésique prise sur le contour *abcda* est égale à l'angle 2π diminué de l'intégrale double de la courbure totale $\frac{1}{\rho\rho'}$ étendue à l'aire intérieure au contour. Le sens positif adopté sur la surface est celui que nous avons défini plus haut, qui amène la tangente positive à la courbe $v = C^{te}$, sur laquelle la différentielle de l'arc est $ds = \mu du$, sur la tangente positive à la courbe $u = C^{te}$ sur laquelle la différentielle de l'arc est $dt = \nu dv$. (Cf fig. 1).

Avec les conventions de signe faites sur γ et δ, le théorème de Gauss donne :

$$-\int_u^{u+\Delta u} \gamma(u, v) \cdot \mu(u, v)\, du + \frac{\pi}{2} + \int_v^{v+\Delta v} \delta(u+\Delta u, v) \cdot \nu(u+\Delta u, v)\, dv$$
$$+\frac{\pi}{2} - \int_{u+\Delta u}^{u} \gamma(u, v+\Delta v) \cdot \mu(u, v+\Delta v)\, du + \frac{\pi}{2} + \int_{v+\Delta v}^{v} \delta(u, v) \cdot \nu(u, v)\, du + \frac{\pi}{2}$$
$$= 2\pi - \iint_{abcd} \frac{\mu(u, v) \cdot \nu(u, v)\, du dv}{\rho\rho'}.$$

En remplaçant γ et δ par leurs valeurs tirées des équations (3), la relation précédente devient :

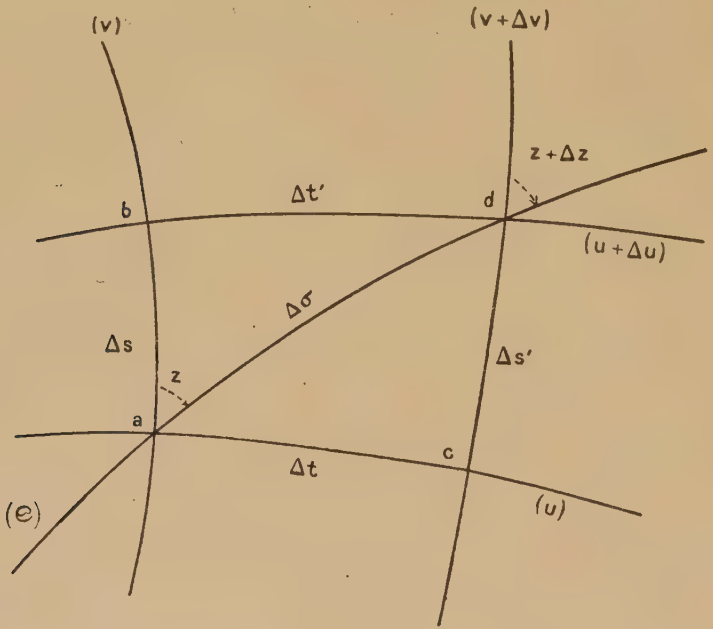
$$\int_v^{v+\Delta v} \left[\frac{1}{\mu(u+\Delta u, v)} \frac{\partial}{\partial u} \nu(u+\Delta u, v) - \frac{1}{\mu(u, v)} \frac{\partial}{\partial u} \nu(u, v) \right] dv$$
$$+ \int_u^{u+\Delta u} \left[\frac{1}{\nu(u, v+\Delta v)} \frac{\partial}{\partial v} \mu(u, v+\Delta v) - \frac{1}{\nu(u, v)} \frac{\partial}{\partial v} \mu(u, v) \right] du$$
$$+ \iint_{abcd} \frac{\mu(u, v) \cdot \nu(u, v)\, du dv}{\rho\rho'} = 0$$

en faisant tendre Δu et Δv vers zéro, nous obtenons à la limite la relation différentielle suivante qui doit être vérifiée en un point quelconque de la surface (Σ) :

$$(4) \qquad \frac{1}{\mu\nu} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \nu}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\nu} \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) \right] + \frac{1}{\rho\rho'} = 0.$$

Cette formule donne en fonction des coefficients μ et ν de la forme quadratique fondamentale la valeur de la courbure totale $\frac{1}{\rho\rho'}$.

2. Courbe tracée sur la surface (Σ). — Une courbe ($\mathcal{C}$) tracée sur la surface (Σ) est définie par une relation $g(u, v) = 0$ entre les paramètres u et v relatifs aux courbes du réseau orthogonal. Soit z, l'azimut de cette courbe, c'est-à-dire l'angle de la tangente positive avec la tangente positive à la courbe $v = C^{te}$ qui passe par le point courant d'abscisse curviligne σ sur ($\mathcal{C}$). L'azimut sera compté dans le sens positif de rotation adopté sur la surface (Σ) de 0° à 360°. Désignons par c la courbure géodésique de la



- fig.3 -

courbe ($\mathcal{C}$); c est une fonction de l'abscisse curviligne σ. L'azimut z est aussi une fonction de σ.

Ces deux fonctions ne sont pas indépendantes; en effet, considérons le triangle curviligne élémentaire *acd* (fig. 3) et soit z l'azimut de la courbe ($\mathcal{C}$) en a et $z + \Delta z$ son azimut au point d. Appliquons le théorème de Gauss sur les excès angulaires au triangle *acd* :

$$z + \int_{\sigma}^{\sigma+\Delta\sigma} c\,d\sigma + \pi - z - \Delta z - \int_{u+\Delta u}^{u} \gamma(u, v+\Delta v)\,.\,\mu(u, v+\Delta v)\,du + \frac{\pi}{2}$$
$$+ \int_{v+\Delta v}^{v} \delta(u, v)\,.\,\nu(u, v)\,dv + \frac{\pi}{2} = 2\pi - \iint_{acd} \frac{\mu(u, v)\cdot\nu(u, v)\,du dv}{\rho\rho'}.$$

Les termes finis des deux membres se détruisent; dans le développement en série de la relation précédente les termes du premier ordre

n'existent que dans le premier membre, le second membre étant du 2e ordre et l'expression :

$$-\Delta z + c\Delta\sigma + \gamma\mu\Delta u - \delta v\Delta v$$

constitue l'ensemble des termes du 1er ordre.

Si on fait tendre $\Delta\sigma$ vers zéro, les valeurs correspondantes de Δu et Δv tendent vers zéro et la relation différentielle :

$$\frac{dz}{d\sigma} = c + \gamma\frac{ds}{d\sigma} - \delta\frac{dt}{d\sigma} \tag{5}$$

doit être vérifiée en tous les points de la courbe $(\mathcal{C})$.

En remplaçant les dérivées $\frac{ds}{d\sigma}$ et $\frac{dt}{d\sigma}$ par $\cos z$ et $\sin z$ respectivement, on trouve la forme équivalente suivante :

$$\frac{dz}{d\sigma} = c + \gamma\cos z - \delta\sin z \tag{5'}$$

dans laquelle on peut toujours exprimer γ et δ sur la courbe $(\mathcal{C})$ en fonction de la seule variable σ.

Pour les courbes de la deuxième famille, on a :

$$z = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{dz}{d\sigma} = 0, \qquad c = \delta.$$

Pour les courbes de la première famille, par contre :

$$z = 0, \qquad \frac{dz}{d\sigma} = 0, \qquad c = -\gamma.$$

Nous avons vu plus haut la raison de cette différence de signe qui résulte directement des conventions de signes que nous avons faites.

3. Projection conforme de la surface (Σ). Relations fondamentales. — Considérons une représentation conforme de la surface (Σ) sur une deuxième surface. Au réseau orthogonal qui a été défini sur la première surface, correspondra sur la deuxième surface un autre réseau orthogonal. Pour la représentation paramétrique de la deuxième surface, nous pouvons adopter les mêmes paramètres u et v; le rapport de similitude sera une fonction de u et v, ayant en chaque point une valeur déterminée; la connaissance de cette fonction est essentielle dans l'étude de la correspondance par points homologues des deux surfaces.

Soient $d\mathrm{S}$ et $d\mathrm{T}$ les différentielles des arcs qui correspondent aux différentielles ds et dt, le rapport de similitude :

$$\mathrm{K}(u, v) = \frac{d\mathrm{S}}{ds} = \frac{d\mathrm{T}}{dt}.$$

Dans ces conditions, le carré de l'élément linéaire de la deuxième surface est :

$$(\mathrm{K}\mu)^2\,du^2 + (\mathrm{K}\nu)^2\,dv^2.$$

Cette forme quadratique étant connue, l'application des relations (3) et (4) que nous avons établies dans le premier paragraphe nous donne les résultats suivants :

Γ et Δ, courbures géodésiques des transformées sur la deuxième surface des courbes du réseau orthogonal sont fournies par les équations :

$$(3') \qquad \begin{cases} \Gamma = \frac{1}{K^2 \mu\nu} \frac{\partial}{\partial v}(K\mu), \\ \Delta = \frac{1}{K^2 \mu\nu} \frac{\partial}{\partial u}(K\nu), \end{cases}$$

et, en tenant compte des équations (3) :

$$(I) \qquad \begin{cases} \Gamma = \frac{\gamma}{K} + \frac{1}{K^2} \cdot \frac{1}{\nu} \frac{\partial K}{\partial v}, \\ \Delta = \frac{\delta}{K} + \frac{1}{K^2} \cdot \frac{1}{\mu} \frac{\partial K}{\partial u}. \end{cases}$$

Si on désigne par $\frac{1}{RR'}$ la courbure totale de la deuxième surface, l'analogue de la formule (4) est :

$$(4') \qquad \frac{1}{K^2 \mu\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{K\mu} \frac{\partial}{\partial u}(K\nu) \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{K\nu} \frac{\partial}{\partial v}(K\mu) \right] \right\} + \frac{1}{RR'} = 0.$$

On peut comme pour la formule (3') isoler les éléments différentiels qu'on a déjà trouvés dans la formule (4) égaux à $\frac{1}{\rho\rho'}$:

$$-\frac{1}{K^2 \rho\rho'} + \frac{1}{RR'} + \frac{1}{K^2 \mu\nu} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\nu}{K\mu} \frac{\partial K}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mu}{K\nu} \frac{\partial K}{\partial v} \right) \right] = 0.$$

En effectuant le calcul des dérivées partielles, on obtient finalement la formule :

$$(II) \qquad \frac{K^2}{\rho\rho'} - \frac{K^4}{RR'} = \frac{K}{\mu\nu} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\nu}{\mu} \frac{\partial K}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mu}{\nu} \frac{\partial K}{\partial v} \right) \right] - \left[\frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\partial K}{\partial u} \right) + \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{\partial K}{\partial v} \right)^2 \right]$$

dans laquelle ont été mis en évidence les deux paramètres différentiels de Beltrami sous la forme particulière qu'ils prennent quand la surface est représentée à l'aide d'un réseau de courbes orthogonales. En effet, dans ce cas, le paramètre différentiel du premier ordre est :

$$\Delta_1 K = \frac{1}{\mu^2} \left(\frac{\partial K}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{\partial K}{\partial v} \right)^2$$

et le paramètre différentiel du second ordre est :

$$\Delta_2 K = \frac{1}{\mu\nu} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\nu}{\mu} \frac{\partial K}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\mu}{\nu} \frac{\partial K}{\partial v} \right) \right].$$

Ces deux opérateurs différentiels ont un caractère invariant [1]; ils permettent de donner à l'équation (II) la forme définitive suivante, indépendante de la représentation paramétrique adoptée pour la surface (Σ) :

$$\text{(II')} \qquad \frac{K^2}{\rho\rho'} - \frac{K^4}{RR'} = K\Delta_2 K - \Delta_1 K$$

ou sous une forme vectorielle :

$$\text{(II'')} \qquad \frac{K^2}{\rho\rho'} - \frac{K^4}{RR'} = K \text{ div. grad } K - \text{grad}^2 K.$$

Enfin, considérons la transformée de la courbe $(\mathcal{C})$ et appelons C sa courbure géodésique. L'équation différentielle (5 *bis*) devient appliquée sur la deuxième surface :

$$\text{(5')} \qquad \frac{1}{K}\cdot\frac{dz}{d\sigma} = C + \Gamma\cos z - \Delta\sin z$$

l'angle z reste le même parce que la représentation est conforme. En comparant avec la formule (5 *bis*) et en tenant compte des équations (I), on trouve :

$$\text{(III)} \qquad C = \frac{c}{K} - \frac{\cos z}{K^2 v}\frac{\partial K}{\partial v} + \frac{\sin z}{K^2\mu}\frac{\partial K}{\partial u}.$$

Soit n la direction obtenue en faisant tourner la tangente positive à la courbe $(\mathcal{C})$ de l'angle $+\frac{\pi}{2}$; comme :

$$\frac{d}{dn} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}\cos z - \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}\sin z,$$

on obtient la formule condensée :

$$\text{(III')} \qquad C = \frac{c}{K} - \frac{1}{K^2}\frac{dK}{dn}.$$

Cette formule contient aussi comme cas particulier les deux équations du système (I). Il y a lieu toutefois de faire attention aux conventions de signe faites : pour Γ et γ, nous avons vu que la convention de signe est inverse de celle faite pour la courbe $(\mathcal{C})$ quelconque; dans ces conditions, l'application de la formule (III') exige que l'on prenne pour les courbes de la 1re famille :

$$C = -\Gamma$$

$$c = -\gamma$$

$$\left(\frac{dK}{dn}\right)_1 = \frac{dK}{dt}$$

[1] G. Bouligand. — Leçons de géométrie vectorielle (2e édition). Champs scalaires et vectoriels (pp. 277 et 283).

c'est-à-dire

$$\Gamma = \frac{\gamma}{K} + \frac{1}{K^2}\frac{dK}{dt}.$$

Pour les courbes de la deuxième famille les deux conventions de signe se confondent; on prendra donc :

$$C = \Delta$$

$$c = \delta$$

la normale n étant orientée dans le sens opposé à celui des s croissant

$$\left(\frac{dK}{dn}\right)_2 = -\frac{dK}{ds}$$

ce qui donne :

$$\Delta = \frac{\delta}{K} + \frac{1}{K^2}\frac{dK}{ds}.$$

Les dérivées $\frac{dK}{ds}$ et $\frac{dK}{dt}$, qui interviennent dans les formules précédentes, sont prises sur les courbes des deux familles, c'est-à-dire respectivement, v étant constant ou u étant constant. Ces dérivées s'expriment facilement à l'aide des dérivées partielles de K par rapport à u et v :

$$\begin{cases} \dfrac{dK}{ds} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial K}{\partial u} \\ \dfrac{dK}{dt} = \dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial K}{\partial v} \end{cases}$$

4. Position du problème. — Unicité de la solution. — Étant données une courbe $(\mathcal{L})$, tracée sur la surface (Σ), et une projection conforme de (Σ) sur une deuxième surface, la fonction $K(u, v)$ qui fixe le rapport de similitude entre les deux surfaces en des points homologues doit être égale à l'unité en tous les points de la courbe $(\mathcal{L})$.

Supposons cette courbe définie par la relation $l(u, v) = 0$ entre les paramètres; pour tous les points u, v de la surface qui vérifient cette relation, on doit avoir $K(u, v) = 1$. D'autre part, pour que la déformation linéaire soit stationnaire, il faut qu'en ces mêmes points $l(u, v) = 0$, on ait :

$$\frac{\partial K}{\partial u} = 0 \qquad \frac{\partial K}{\partial v} = 0.$$

D'après ce qui précède, la fonction $K(u, v)$ doit vérifier l'équation aux dérivées partielles du 2e ordre (II).

Géométriquement, par rapport à trois axes de coordonnées u, v, K les conditions précédentes signifient que la surface $K(u, v)$ solution de l'équa-

tion aux dérivées partielles (II), doit passer par la courbe définie par les équations :

$$l(u, v) = 0 \quad K = 1$$

et avoir le long de cette courbe pour plan tangent le plan défini par l'équation $K = 1$.

L'équation aux dérivées partielles du second ordre (II) étant holomorphe, si la fonction $l(u, v) = 0$ est aussi holomorphe, il existe une fonction K des deux variables u et v satisfaisant à l'équation (II) holomorphe au voisinage de la courbe $(\mathcal{L})$; cette fonction se réduit à l'unité et a un gradient nul tout le long de cette courbe. Géométriquement, il existe une surface et une seule passant par une courbe donnée et ayant le long de cette courbe un plan tangent donné : la recherche de cette surface intégrale constitue le problème de Cauchy pour l'équation aux dérivées partielles (II) à laquelle doivent satisfaire toutes les projections conformes. Le problème admet donc, quand les conditions précédentes sont imposées, une solution et cette solution est unique.

Suivant les usages envisagés pour la projection, on peut tolérer une déformation plus ou moins grande de la surface (Σ), cela nous conduira à imposer une borne supérieure à la déformation mesurée par la fonction $K - 1$. La fonction K étant continue, on sera conduit à n'utiliser la projection que dans une bande dont la courbe $(\mathcal{L})$ est la courbe médiane et il suffira d'avoir le développement en série de la fonction K au voisinage de $(\mathcal{L})$ pour pouvoir utiliser pratiquement la projection.

Ce développement à partir d'un point quelconque $(u_0 v_0)$ de la courbe $(\mathcal{L})$ s'écrit :

$$(6) \qquad K = 1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 K}{\partial u^2}\right)_0 \Delta u^2 + 2\left(\frac{\partial^2 K}{\partial u \partial v}\right)_0 \Delta u \Delta v + \left(\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}\right)_0 \Delta v^2\right] + \cdots$$

5. Introduction des variables s et t. — Les arcs s et t des courbes du réseau orthogonal tracé sur la surface (Σ) sont définis en fonction de u et de v par les relations différentielles :

$$\begin{cases} ds = \mu(u, v)\, du \\ dt = \nu(u, v)\, dv. \end{cases}$$

En un point de la surface, les deux dérivées premières par rapport à s et t seront représentées par les deux opérateurs $\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{1}{\nu}\cdot\frac{\partial}{\partial v}$.

Soit M_0 un point de la courbe $(\mathcal{L})$ pris comme origine, ses coordonnées paramétriques sur la surface (Σ) sont u_0, v_0 ; si M est un point voisin de coordonnées paramétriques $u_0 + \Delta u$, $v_0 + \Delta v$, les accroissements Δs et Δt sont pris respectivement égaux aux arcs PM et QM des courbes de

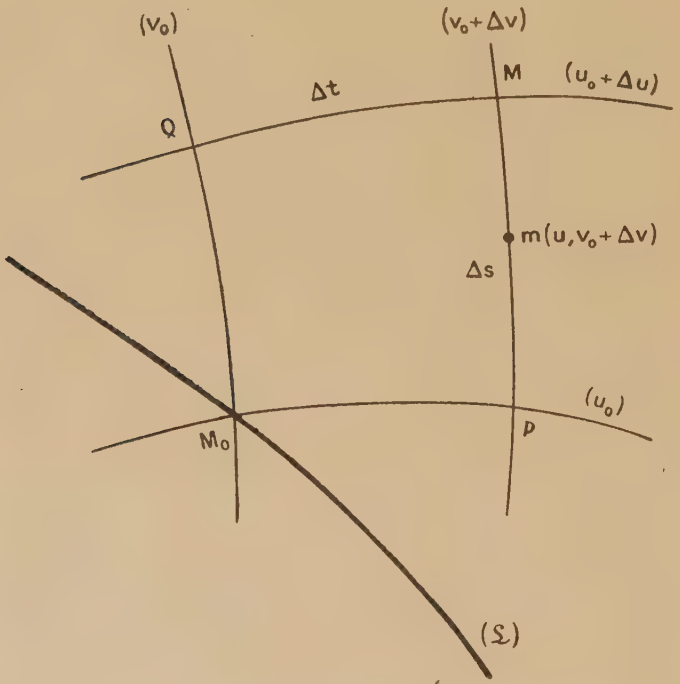
paramètres $(u_0+\Delta u)$ et $(v_0+\Delta v)$ [fig. 4]. Nous allons calculer les premiers termes des développements en série Δs et Δt ainsi définis en fonction de Δu et de Δv.

Si m est un point variable de l'arc PM, ses coordonnées paramétriques sont $(u, v_0+\Delta v)$ et :

$$\Delta s = \int_{u_0}^{u_0+\Delta u} \mu(u, v_0+\Delta v)\, du.$$

On a :

$$\mu(u, v_0+\Delta v) = \mu_0 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)_0 (u-u_0) + \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)_0 \Delta v + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}\right)_0 (u-u_0)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v}\right)_0 (u-u_0)\Delta v + \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2}\right)_0 \Delta v^2\right] + \cdots$$



- fig. 4 -

D'où :

$$(7)\qquad \Delta s = \mu_0 \Delta u + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial u}\right)_0 \Delta u^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial v}\right)_0 \Delta u \Delta v + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}\right)_0 \Delta u^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v}\right)_0 \Delta u^2 \Delta v + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial v^2}\right)_0 \Delta u \Delta v^2 + \cdots$$

et pour Δt, on trouve de même :

$$\Delta t = \int_{v_0}^{v_0+\Delta v} \nu(u_0+\Delta u, v)\, dv$$

et :

$$(8)\qquad \Delta t = v_0\Delta v + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial v}\right)_0\Delta v^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)_0\Delta v\Delta u + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial v^2}\right)_0\Delta v^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial u\partial v}\right)_0\Delta v^2\Delta u + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial u^2}\right)_0\Delta v\Delta u^2 + \dots$$

Considérons le développement en série de K en fonction de ces accroissements Δs et Δt; ce développement est de la forme :

$$(6')\qquad K = 1 + \frac{1}{2}(A_{20}\Delta s^2 + 2A_{11}\Delta s\Delta t + A_{02}\Delta t^2) + \frac{1}{6}(A_{30}\Delta s^3 + 3A_{21}\Delta s^2\Delta t + 3A_{12}\Delta s\Delta t^2 + A_{03}\Delta t^3) + \dots$$

En identifiant les développements (6) et (6') après avoir remplacé Δs et Δt par leurs valeurs calculées ci-dessus, on pourrait déterminer les coefficients $A_{20}, A_{11}, A_{02}, A_{30}, A_{21}, A_{12}, A_{03}, \dots$ en fonction des dérivées partielles $\left(\frac{\partial^2 K}{\partial u^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 K}{\partial u\partial v}\right)_0, \left(\frac{\partial^2 K}{\partial v^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^3 K}{\partial u^3}\right)_0, \left(\frac{\partial^3 K}{\partial u^2\partial v}\right)_0, \left(\frac{\partial^3 K}{\partial u\partial v^2}\right)_0, \left(\frac{\partial^3 K}{\partial v^3}\right)_0, \dots$

Au point de vue mathématique, la recherche du développement en série (6) et du développement en série (6') constitue exactement le même problème. Mais l'introduction des arcs Δs et Δt est intéressante pour les applications géodésiques parce que les longueurs mesurées à la surface de la terre s'introduisent naturellement dans les calculs. Si on considère les courbes (u_0) et (v_0) de la figure 4 comme des axes de coordonnées généralisés tracés sur la surface (Σ), les coordonnées du point M seront les longueurs des arcs PM et QM. Il faut remarquer que ces distances doivent être mesurées sur les courbes $(u_0 + \Delta u)$ et $(v_0 + \Delta v)$ qui passent par le point M et non sur les courbes (u_0) et (v_0).

6. Calcul des opérateurs $\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}$. — Supposons connu le développement en série d'une fonction de point sur la surface (Σ) en fonction des accroissements Δs et Δt définis dans le paragraphe qui précède. Les opérateurs étant appliqués en un point quelconque M de la surface, nous pouvons écrire les relations suivantes entre les dérivées partielles :

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial(\Delta s)}\cdot\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\Delta s)}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial(\Delta t)}\cdot\frac{1}{\mu}\frac{\partial(\Delta t)}{\partial u} \\ \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial(\Delta t)}\frac{1}{\nu}\frac{\partial(\Delta t)}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial(\Delta s)}\frac{1}{\nu}\frac{\partial(\Delta s)}{\partial v}. \end{cases}$$

Comme les variables u et v sont des coordonnées paramétriques de la surface (Σ) :

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial(\Delta u)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial(\Delta v)}$$

il suffit de dériver les équations (7) et (8) qui donnent les développements en série de Δs et Δt :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\Delta s)}{\partial u} = \mu_0 + \left(\dfrac{\partial \mu}{\partial u}\right)_0 \Delta u + \left(\dfrac{\partial \mu}{\partial v_0}\right) \Delta v \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial u^2}\right)_0 \Delta u^2 + 2\left(\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v}\right)_0 \Delta u \Delta v + \left(\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial v^2}\right)_0 \Delta v^2\right] + \cdots \\ \dfrac{\partial(\Delta t)}{\partial v} = \nu_0 + \left(\dfrac{\partial \nu}{\partial u}\right)_0 \Delta u + \left(\dfrac{\partial \nu}{\partial v}\right)_0 \Delta v \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial u^2}\right)_0 \Delta u^2 + 2\left(\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial u \partial v}\right)_0 \Delta u \Delta v + \left(\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial v^2}\right)_0 \Delta v^2\right] + \cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\Delta s)}{\partial v} = \left(\dfrac{\partial \mu}{\partial v}\right)_0 \Delta u + \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial u \partial v}\right)_0 \Delta u^2 + 2\left(\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial v^2}\right)_0 \Delta u \Delta v\right] + \cdots \\ \dfrac{\partial(\Delta t)}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial \nu}{\partial u}\right)_0 \Delta v + \dfrac{1}{2}\left[2\left(\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial u^2}\right)_0 \Delta u \Delta v + \left(\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial u \partial v}\right)_0 \Delta v^2\right] + \cdots \end{cases}$$

Les deux premières équations montrent que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\Delta s)}{\partial u} = \mu(u, v) \\ \dfrac{\partial(\Delta t)}{\partial v} = \nu(u, v) \end{cases}$$

et les deux dernières équations montrent que les développements en série de $\dfrac{\partial(\Delta s)}{\partial v}$ et $\dfrac{\partial(\Delta t)}{\partial u}$ commencent par un terme du premier ordre. On a donc pour les deux opérateurs des développements de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial(\Delta s)} + \dfrac{\partial}{\partial(\Delta t)} \cdot \dfrac{1}{\mu_0}\left(\dfrac{\partial \nu}{\partial u}\right)_0 \Delta v + \cdots \\ \dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial(\Delta t)} + \dfrac{\partial}{\partial(\Delta s)} \cdot \dfrac{1}{\nu_0}\left(\dfrac{\partial \mu}{\partial v}\right)_0 \Delta u + \cdots \end{cases}$$

Nous nous limitons au premier ordre, qui suffit pour les applications ; en tenant compte compte des formules (3) qui donnent les expressions des courbures géodésiques, γ et δ et en appelant γ_0 et δ_0 les valeurs de ces fonctions à l'origine M_0 du développement en série :

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial(\Delta s)} + \dfrac{\partial}{\partial(\Delta t)} \delta_0 \Delta t + \cdots \\ \dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial(\Delta t)} + \dfrac{\partial}{\partial(\Delta s)} \gamma_0 \Delta s + \cdots \end{cases}$$

Pour effectuer sur un développement en série la dérivation représentée par les symboles $\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial u}$ et $\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial v}$, il ne suffit pas de prendre brutalement les dérivées partielles par rapport aux coordonnées généralisées Δs et Δt ; il y a lieu d'ajouter des termes complémentaires dont le premier est fonction de la courbure géodésique de la courbe qui porte l'autre coordonnée.

7. Développement en série des courbures géodésiques Γ et Δ. — Les fonctions γ et δ sont supposées données; si on connaît les coefficients du développement en série (6′) de K par rapport à Δs et Δt, les fonctions Γ et Δ données par les formules (1) peuvent être développées en série par rapport aux mêmes variables.

Si le développement du rapport de similitude K est connu jusqu'au 3ᵉ ordre inclusivement, les termes du premier ordre étant nuls, les formules (9) suffisent pour opérer le calcul jusqu'au 2ᵉ ordre inclusivement, c'est-à-dire avec toute la précision désirable pour les applications :

$$(10)\quad \begin{cases} \Gamma = \gamma\left[1 - \frac{1}{2}(A_{20}\Delta s^2 + 2A_{11}\Delta s\Delta t + A_{02}\Delta t^2)\right] + A_{11}\Delta s + A_{02}\Delta t \\ \quad + \frac{1}{2}[A_{21}\Delta s^2 + 2A_{12}\Delta s\Delta t + A_{03}\Delta t^2] + \gamma_0\Delta s(A_{20}\Delta s + A_{11}\Delta t) + \dots \\ \Delta = \delta\left[1 - \frac{1}{2}(A_{20}\Delta s^2 + 2A_{11}\Delta s\Delta t + A_{02}\Delta t^2)\right] + A_{20}\Delta s + A_{11}\Delta t \\ \quad + \frac{1}{2}[A_{30}\Delta s^2 + 2A_{21}\Delta s\Delta t + A_{12}\Delta t^2] + \delta_0\Delta t(A_{11}\Delta s + A_{02}\Delta t) + \dots \end{cases}$$

Si on se borne à considérer les courbes passant par l'origine M_0, on prendra Δt nul pour la courbure géodésique Γ et Δs nul pour la courbure géodésique Δ. Les formules (10) deviennent les expressions simplifiées suivantes :

$$(10')^{(1)}\quad \begin{cases} \Gamma = \gamma\left(1 + \frac{1}{2}A_{20}\Delta s^2\right) + A_{11}\Delta s + \frac{1}{2}A_{21}\Delta s^2 + \dots \\ \Delta = \delta\left(1 + \frac{1}{2}A_{02}\Delta t^2\right) + A_{11}\Delta t + \frac{1}{2}A_{12}\Delta t^2 + \dots \end{cases}$$

Ces dernières formules seront appliquées pour la construction des tables de la projection.

8. Calcul des paramètres différentiels de Beltrami. — Si on connaît le développement série (6′) de la fonction K, la valeur des paramètres différentiels invariants de Beltrami peut être obtenue par une méthode analogue à celle qui nous a servi dans le paragraphe précédent pour calculer Γ et Δ. Le paramètre différentiel $\Delta_2 K$, exigeant deux dérivations, ne sera connu qu'au premier ordre. Pour le paramètre différentiel $\Delta_1 K$, nous nous limiterons au calcul de sa partie principale car il est du second ordre.

Nous avons :

$$\Delta_2 K = \frac{1}{\mu\nu}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\nu}{\mu}\frac{\partial K}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mu}{\nu}\frac{\partial K}{\partial v}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\mu\nu}\left[\frac{\partial \nu}{\partial u}\cdot\frac{1}{\mu}\frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v}\cdot\frac{1}{\nu}\frac{\partial K}{\partial v}\right] + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial K}{\partial u}\right) + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial K}{\partial v}\right)$$

(1) On peut toujours écrire pour γ et δ les développements suivants :

$$\gamma = \gamma_0 + C_{10}\Delta s + C_{01}\Delta t + \dots \qquad \delta = \delta_0 + D_{10}\Delta s + D_{01}\Delta t + \dots$$

ce qui permet de confondre à cette approximation γ_0 avec γ et δ_0 avec δ.

en introduisant les courbures géodésiques γ et δ données par les formules (3), on trouve :

$$\Delta_2 K = \frac{\delta}{\mu}\frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\gamma}{\nu}\frac{\partial K}{\partial v} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial K}{\partial u}\right) + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\nu}\frac{\partial K}{\partial v}\right)$$

expression où n'interviennent que les deux opérateurs $\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}$ étudiés au paragraphe 6.

Dans ces conditions le paramètre différentiel de deuxième ordre de Beltrami a pour valeur :

$$(11) \qquad \Delta_2 K = A_{20} + A_{02} + [A_{30} + A_{12} + A_{20}\delta_0 + 3A_{11}\gamma_0]\Delta s + [A_{03} + A_{21} + A_{02}\gamma_0 + 3A_{11}\delta_0]\Delta t + \dots$$

On peut, en effet, dans les coefficients des termes du premier ordre confondre δ_0 et δ, γ_0 et γ [1].

Le paramètre différentiel du premier ordre de Beltrami est du deuxième ordre infinitésimal; les premiers termes de son développement sont :

$$(11\ bis) \qquad \Delta_1 K = (A_{20}\Delta s + A_{11}\Delta t)^2 + (A_{11}\Delta s + A_{02}\Delta t)^2 + \dots$$

9. Surface indicatrice des altérations linéaires. — Nous avons en vue l'étude des projections conformes planes; pour tomber dans ce cas particulier, il suffit de prendre dans la formule (II) la courbure totale $\frac{1}{RR'}$ identiquement nulle.

La surface indicatrice des altérations linéaires est définie par la fonction $Z(u, v)$ telle que :

$$K = 1 + Z.$$

Pour les applications, qui font l'objet des chapitres ci-après, nous calculons les premiers termes du développement en série de la fonction K par rapport aux accroissements Δs et Δt qui ont été définis au paragraphe 5. Nous considérons maintenant un point quelconque de la courbe $(\mathcal{L})$ et les deux courbes (u_0) et (v_0), qui passent par ce point. Par un point M voisin, passent deux courbes (u) et (v), Δs et Δt sont les distances comptées sur les courbes (u) et (v) du point M aux deux courbes orthogonales (u_0) et (v_0).

Pour tenir compte du fait que l'origine peut être prise quelconque sur la courbe $(\mathcal{L})$, nous poserons :

$$A_{20} = \mathfrak{R} \qquad A_{11} = \mathfrak{S} \qquad A_{02} = \mathfrak{T}$$

$$A_{30} = \mathfrak{O} \qquad A_{21} = \mathfrak{V} \qquad A_{12} = \mathfrak{W} \qquad A_{03} = \mathfrak{X}.$$

[1] Cf note de la page précédente.

La représentation étudiée ayant une déformation stationnaire sur la courbe $(\mathcal{L})$, les coefficients $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont identiquement nuls et le développement en série s'écrit :

$$(12)\qquad K = 1 + \frac{1}{2}(\mathcal{R}\Delta s^2 + 2\mathcal{S}\Delta s\Delta t + \mathcal{T}\Delta t^2) + \frac{1}{6}(\mathcal{U}\Delta s^3 + 3\mathcal{V}\Delta s^2\Delta t + 3\mathcal{V}\Delta s\Delta t^2 + \mathcal{X}\Delta t^3) + \dots$$

10. Calcul de $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$. — Sur la courbe $(\mathcal{L})$, l'équation aux dérivées partielles (II) doit être vérifiée; le paramètre différentiel du premier ordre de Beltrami qui est un infiniment petit du deuxième ordre est nul sur la courbe; par contre le paramètre différentiel du second ordre de Beltrami a un terme fini égal à $\mathcal{R} + \mathcal{T}$. D'autre part, la valeur de $\frac{K^2}{\rho\rho'}$ sur $(\mathcal{L})$ se réduit à $\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathcal{L}}$. Il faut donc que la condition :

$$(13)\qquad \mathcal{R} + \mathcal{T} = \left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathcal{L}}$$

soit vérifiée sur la courbe $(\mathcal{L})$.

Si nous réservons le symbole δ aux différentielles prises sur la courbe $(\mathcal{L})$, courbe de la base de la projection, le fait que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont identiquement nuls entraîne :

$$(14)\qquad \begin{cases} \delta\mathcal{P} = \mathcal{R}\delta s + \mathcal{S}\delta t = 0, \\ \delta\mathcal{Q} = \mathcal{S}\delta s + \mathcal{T}\delta t = 0. \end{cases}$$

Il est facile, à partir des trois équations précédentes (13) et (14), de tirer les valeurs de $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ en fonction des différentielles δs et δt ou de l'azimut $z_{\mathcal{L}}$ de la tangente à la courbe $(\mathcal{L})$:

$$(15)\qquad \begin{cases} \mathcal{R} = \left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathcal{L}} \frac{\delta t^2}{\delta s^2 + \delta t^2} = \left(\frac{\sin^2 z}{\rho\rho'}\right)_{\mathcal{L}}, \\ \mathcal{S} = -\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathcal{L}} \frac{\delta s.\delta t}{\delta s^2 + \delta t^2} = -\left(\frac{\sin z\cos z}{\rho\rho'}\right)_{\mathcal{L}}, \\ \mathcal{T} = \left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathcal{L}} \frac{\delta s^2}{\delta s^2 + \delta t^2} = \left(\frac{\cos^2 z}{\rho\rho'}\right)_{\mathcal{L}}. \end{cases}$$

Δs et Δt étant les accroissements définis au paragraphe 5, on a au troisième ordre près :

$$(16)\quad K = 1 + \left(\frac{1}{2\rho\rho'}\right)_{\mathcal{L}}(\sin^2 z_{\mathcal{L}}\,\Delta s^2 - 2\sin z_{\mathcal{L}}\cos z_{\mathcal{L}}\,\Delta s\Delta t + \cos^2 z_{\mathcal{L}}\,\Delta t^2).$$

Pour que les deux équations (14) soient compatibles, il faut que le déterminant $\mathcal{R}\mathcal{T} - \mathcal{S}^2$ soit nul, cela indique que tous les points de la surface indicatrice situés sur $(\mathcal{L})$ sont des points paraboliques, comme cela était à prévoir étant données les conditions imposées à la solution.

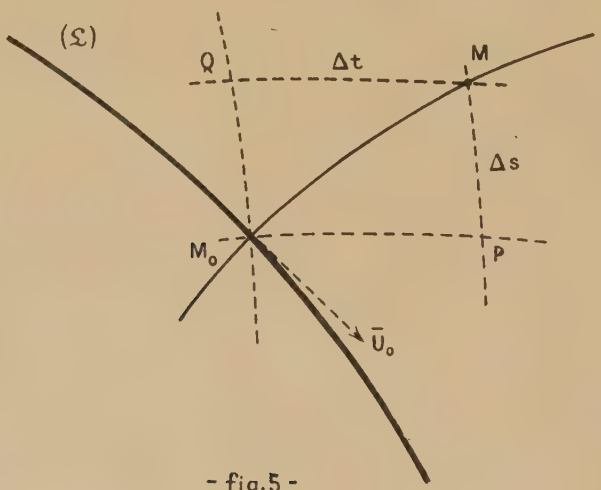
11. Interprétation géométrique. — La formule (16) peut s'écrire :

$$K = 1 + \frac{(\sin z_g\, \Delta s - \cos z_g\, \Delta t)^2}{2(\rho\rho')_g}. \tag{16'}$$

Soit M un point de la surface (Σ) voisin de la courbe $(\mathcal{L})$; abaissons de ce point la géodésique perpendiculaire à la courbe $(\mathcal{L})$; soit M_0 le point d'intersection. On peut toujours supposer le développement (16') fait à partir du point M_0, situé sur la courbe $(\mathcal{L})$ et on a :

$$PM = \Delta s, \qquad QM = \Delta t.$$

Soit $\overline{U_0}$ le vecteur unitaire porté par la tangente à la courbe $(\mathcal{L})$ au



- fig.5 -

point M_0. Pour l'interprétation géométrique de la formule (16'), on peut confondre la surface avec son plan tangent en M_0 et admettre que les arcs $PM = \Delta s$ et $QM = \Delta t$ sont des segments de droite.

L'expression $\sin z_g\, \Delta s - \cos z_g\, \Delta t$ est égale au produit vectoriel $\overline{M_0M} \times \overline{U_0}$ dont la valeur est M_0M, puisque le vecteur U_0 normal a pour longueur l'unité.

Par suite :

$$K = 1 + \frac{(M_0M)^2}{2(\rho\rho')_g}. \tag{17}$$

Le premier terme de la déformation linéaire au voisinage de $(\mathcal{L})$ est indépendant de la forme de la courbe de base de la projection; il ne dépend que de la courbure totale de (Σ) et croît proportionnellement au carré de la distance à la courbe de base.

Si la courbure totale de la surface (Σ) est positive (c'est le cas lorsque la surface est convexe), le rapport de similitude K est minimum sur la courbe $(\mathcal{L})$; si cette courbure totale est négative (surface à double courbure), le rapport de similitude K est maximum sur la courbe $(\mathcal{L})$.

12. Calcul de $\mathcal{O}, \mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{X}$. — Nous allons écrire que le développement en série (12) est solution de l'équation (II) qui dans le cas particulier de la représentation plane se réduit à :

$$\frac{K^2}{\rho\rho'} = K\Delta_2 K - \Delta_1 K.$$

L'application des formules (11) et (11 *bis*) donne :

$$\Delta_2 K = \mathcal{R} + \mathcal{C} + (\mathcal{O} + \mathcal{W} + \mathcal{R}\delta_{\mathcal{L}} + 3\mathcal{S}\gamma_{\mathcal{L}})\,\Delta s + (\mathcal{V} + \mathcal{X} + \mathcal{C}\gamma_{\mathcal{L}} + 3\mathcal{S}\delta_{\mathcal{L}})\,\Delta t + \dots$$

$$\Delta_1 K = (\mathcal{R}\Delta s + \mathcal{S}\Delta t)^2 + (\mathcal{S}\Delta s + \mathcal{C}\Delta t)^2 + \dots$$

D'autre part, la courbure totale $\frac{1}{\rho\rho'}$ peut se développer en série par rapport aux accroissements Δs et Δt :

$$\frac{1}{\rho\rho'} = \left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathcal{L}} + \left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathcal{L}}\Delta s + \left[\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathcal{L}}\Delta t + \dots$$

L'identification des parties finies a fourni l'équation (13) du paragraphe précédent; l'identification des termes du premier ordre conduit aux deux équations :

$$(18)\qquad \begin{cases} \mathcal{O} + \mathcal{W} + \mathcal{R}\delta_{\mathcal{L}} + 3\mathcal{S}\gamma_{\mathcal{L}} = \left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathcal{L}} & (a) \\ \mathcal{V} + \mathcal{X} + \mathcal{C}\gamma_{\mathcal{L}} + 3\mathcal{S}\delta_{\mathcal{L}} = \left[\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathcal{L}} & (b). \end{cases}$$

Comme K est identique à l'unité sur la courbe $(\mathcal{L})$, la valeur en deux points M_0 et M'_0 quelconques voisins de la courbe de base doit être la même. Soit $A_{20}, A_{11}, A_{02}, A_{30}, A_{21}, A_{12}, A_{03}\dots$ les coefficients du développement de la forme (6') fait à partir de M_0 comme origine, $A'_{20}, A'_{11}, A'_{02}, A'_{30}, A'_{21}, A'_{12}, A'_{03}\dots$ les coefficients analogues pour un deuxième point M'_0 pris comme origine. Les formules (9) permettent le calcul des opérateurs successifs suivants appliqués au développement en série de K.

$$
(19)\quad
\begin{cases}
\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial K}{\partial u} = A_{20}\Delta s + A_{11}\Delta t \\
\qquad + \dfrac{1}{2}\left[A_{30}\Delta s^2 + 2(A_{21} + A_{11}\delta_0)\Delta s\Delta t + (A_{12} + 2A_{02}\delta_0)\Delta t^2\right] + \dots \\
\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial K}{\partial v} = A_{11}\Delta s + A_{02}\Delta t \\
\qquad + \dfrac{1}{2}\left[(A_{21} + 2A_{20}\gamma_0)\Delta s^2 + 2(A_{12} + A_{11}\gamma_0)\Delta s\Delta t + A_{03}\Delta t^2\right] + \dots \\
\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial K}{\partial u}\right) = A_{20} + A_{30}\Delta s + (A_{21} + 2A_{11}\delta_0)\Delta t + \dots \\
\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial K}{\partial u}\right) = A_{11} + (A_{21} + A_{11}\delta_0 + A_{20}\gamma_0)\Delta s + (A_{12} + 2A_{02}\delta_0)\Delta t + \dots \\
\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial K}{\partial v}\right) = A_{11} + (A_{21} + 2A_{20}\gamma_0)\Delta s + (A_{12} + A_{11}\gamma_0 + A_{02}\delta_0)\Delta t + \dots \\
\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial K}{\partial v}\right) = A_{02} + (A_{12} + 2A_{11}\gamma_0)\Delta s + A_{03}\Delta t + \dots
\end{cases}
$$

Si les développements précédents ont été faits au point M_0, nous aurons avec les notations adoptées :

$$A_{20} = \mathcal{R} \qquad A_{11} = \mathcal{S} \qquad A_{02} = \mathcal{T}$$
$$A_{30} = \mathcal{U} \qquad A_{21} = \mathcal{V} \qquad A_{12} = \mathcal{W} \qquad A_{03} = \mathcal{X}.$$

S'ils ont été faits au point M'_0, les coefficients qui interviennent sont :

$$A'_{20} = \mathcal{R} + \delta\mathcal{R} \qquad A'_{11} = \mathcal{S} + \delta\mathcal{S} \qquad A'_{02} = \mathcal{T} + \delta\mathcal{T}$$
$$A'_{30} = \mathcal{U} + \delta\mathcal{U} \qquad A'_{21} = \mathcal{V} + \delta\mathcal{V} \qquad A'_{12} = \mathcal{W} + \delta\mathcal{W} \qquad A'_{03} = \mathcal{X} + \delta\mathcal{X}.$$

Sur la courbe $(\mathcal{L})$ on peut indifféremment calculer les fonctions précédentes (19) à l'aide du développement en série fait à partir de M_0 et à l'aide du développement en série fait à partir de M'_0 ; en particulier, pour le point M'_0, on a :

$$
(20)\quad
\begin{cases}
\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial K}{\partial u} = \mathcal{R}\delta s + \mathcal{S}\delta t + \dots = 0 \\
\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial K}{\partial v} = \mathcal{S}\delta s + \mathcal{T}\delta t + \dots = 0 \\
\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial K}{\partial u}\right) = \mathcal{R} + \mathcal{U}\delta s + (\mathcal{V} + 2\mathcal{S}\delta_0)\delta t + \dots = \mathcal{R} + \delta\mathcal{R} \\
\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial K}{\partial u}\right) = \mathcal{S} + (\mathcal{V} + \mathcal{S}\delta_0 + \mathcal{R}\gamma_0)\delta s + (\mathcal{W} + 2\mathcal{T}\delta_0)\delta t + \dots = \mathcal{S} + \delta\mathcal{S} \\
\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial K}{\partial v}\right) = \mathcal{S} + (\mathcal{V} + 2\mathcal{R}\gamma_0)\delta s + (\mathcal{W} + \mathcal{S}\gamma_0 + \mathcal{T}\delta_0)\delta t + \dots = \mathcal{S} + \delta\mathcal{S} \\
\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial K}{\partial v}\right) = \mathcal{T} + (\mathcal{W} + 2\mathcal{S}\gamma_0)\delta s + \mathcal{X}\delta t + \dots = \mathcal{T} + \delta\mathcal{T}.
\end{cases}
$$

La première expression correspond au développement fait à partir de l'origine M_0, le point M'_0 est défini par les accroissements $\Delta s = \delta s$ et $\Delta t = \delta t$; la deuxième expression correspond au développement à partir du point M'_0 lui-même et on y a pris $\Delta s = 0$ et $\Delta t = 0$.

Les deux premières équations constituent le système (14) du paragraphe précédent. En raison de ces relations (14), la quatrième équation et la cinquième équation du système précédent sont identiques. Finalement, en appelant $\delta\sigma$ la différentielle de l'arc de la courbe de base $(\mathcal{L})$, nous aboutissons aux trois conditions suivantes pour le point courant de la courbe de base $(\mathcal{L})$:

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{O}\cos z_{\mathfrak{L}} + \mathfrak{P}\sin z_{\mathfrak{L}} = \dfrac{\delta \mathcal{R}}{\delta\sigma} - 2\mathcal{S}\delta_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}} & (c) \\ \mathfrak{P}\cos z_{\mathfrak{L}} + \mathfrak{W}\sin z_{\mathfrak{L}} = \dfrac{\delta \mathcal{S}}{\delta\sigma} - \mathcal{R}\gamma_{\mathfrak{L}}\cos z - \mathcal{C}\delta_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}} & (d) \\ \mathfrak{W}\cos z_{\mathfrak{L}} + \mathfrak{X}\sin z_{\mathfrak{L}} = \dfrac{\delta \mathcal{C}}{\delta\sigma} - 2\mathcal{S}\gamma_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}} & (e) \end{cases}$$

les valeurs des fonctions $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$ en tout point de $(\mathcal{L})$ ont été calculées précédemment (formules 15).

Les relations (18) et (21) suffisent pour le calcul des coefficients $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$ et $\mathfrak{X}$ et sont compatibles.

Les cinq équations (a), (b), (c), (d), (e) entre les quatre coefficients $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$ ne sont pas indépendantes :

$$(a)\cos z_{\mathfrak{L}} + (b)\sin z_{\mathfrak{L}}$$

$$(c) + (e)$$

sont deux combinaisons identiques parce que :

$$\frac{\delta}{\delta\sigma}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathfrak{L}} = \left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}} + \left[\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}}$$

$$\frac{\delta}{\delta\sigma}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathfrak{L}} = \frac{\delta}{\delta\sigma}(\mathcal{R} + \mathcal{C})$$

et qu'en vertu des relations (14), les termes qui contiennent les courbures géodésiques $\gamma_{\mathfrak{L}}$ et $\delta_{\mathfrak{L}}$ se détruisent.

La résolution de ces cinq équations compatibles donne les valeurs des coefficients $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$:

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{O} &= \left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathfrak{L}}\sin^2 z_{\mathfrak{L}} + \frac{\delta\mathfrak{R}}{\delta\sigma}\cos z_{\mathfrak{L}} \\
&\quad + \mathfrak{R}\sin z_{\mathfrak{L}}\left(\gamma_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}} - \delta_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}}\right) \\
&\quad - \frac{\delta\mathfrak{S}}{\delta\sigma}\sin z_{\mathfrak{L}} - 3\mathfrak{S}\sin z_{\mathfrak{L}}\left(\gamma_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}} + \delta_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}}\right) \\
\mathfrak{P} &= \left[\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathfrak{L}}\cos^2 z_{\mathfrak{L}} + \frac{\delta\mathfrak{T}}{\delta\sigma}\sin z_{\mathfrak{L}} \\
&\quad - \mathfrak{T}\cos z_{\mathfrak{L}}\left(\gamma_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}} - \delta_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}}\right) \\
&\quad - \frac{\delta\mathfrak{S}}{\delta\sigma}\cos z_{\mathfrak{L}} - 3\mathfrak{S}\cos z_{\mathfrak{L}}\left(\gamma_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}} + \delta_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}}\right) \\
\mathfrak{Y} &= \left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathfrak{L}}\cos^2 z_{\mathfrak{L}} - \frac{\delta\mathfrak{R}}{\delta\sigma}\cos z_{\mathfrak{L}} \\
&\quad - \mathfrak{R}\cos z_{\mathfrak{L}}\left(\gamma_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}} + \delta_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}}\right) \\
&\quad + \frac{\delta\mathfrak{S}}{\delta\sigma}\sin z_{\mathfrak{L}} - 3\mathfrak{S}\cos z_{\mathfrak{L}}\left(\gamma_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}} - \delta_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}}\right) \\
\mathfrak{X} &= \left[\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathfrak{L}}\sin^2 z_{\mathfrak{L}} - \frac{\delta\mathfrak{T}}{\delta\sigma}\sin z_{\mathfrak{L}} \\
&\quad - \mathfrak{T}\sin z_{\mathfrak{L}}\left(\gamma_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}} + \delta_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}}\right) \\
&\quad + \frac{\delta\mathfrak{S}}{\delta\sigma}\cos z_{\mathfrak{L}} + 3\mathfrak{S}\sin z_{\mathfrak{L}}\left(\gamma_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}} - \delta_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}}\right).
\end{aligned}\right.$$

Les formules (22) peuvent se transformer par l'introduction de la courbure géodésique c de la courbe de base $(\mathfrak{L})$; dans la dérivation par rapport à σ de $\mathfrak{R}$. $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ s'introduit la dérivée $\frac{\delta z}{\delta\sigma}$ dont la formule (5′) donne la valeur en fonction des courbures géodésiques γ, δ et c.

Finalement après réduction on obtient :

$$(23)\quad\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{O} &= \left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathfrak{L}}\sin^2 z_{\mathfrak{L}} + 2\frac{\delta}{\delta\sigma}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}}\sin^2 z_{\mathfrak{L}} \\
&\quad - 3\mathfrak{S}\gamma_{\mathfrak{L}} - c\left(\mathfrak{R}\sin z_{\mathfrak{L}} + 3\mathfrak{S}\cos z_{\mathfrak{L}}\right) \\
\mathfrak{P} &= \left[\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathfrak{L}}\sin^2 z_{\mathfrak{L}} - 2\frac{\delta}{\delta\sigma}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}}\cos^2 z_{\mathfrak{L}} \\
&\quad - \mathfrak{T}\gamma_{\mathfrak{L}} - c\left(\mathfrak{T}\cos z_{\mathfrak{L}} + 3\mathfrak{S}\sin z_{\mathfrak{L}}\right) \\
\mathfrak{Y} &= \left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathfrak{L}}\cos^2 z_{\mathfrak{L}} - 2\frac{\delta}{\delta\sigma}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathfrak{L}}\cos z_{\mathfrak{L}}\sin^2 z_{\mathfrak{L}} \\
&\quad - \mathfrak{R}\delta_{\mathfrak{L}} - c\left(\mathfrak{R}\sin z_{\mathfrak{L}} + 3\mathfrak{S}\cos z_{\mathfrak{L}}\right) \\
\mathfrak{X} &= \left[\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)\right]_{\mathfrak{L}}\cos^2 z_{\mathfrak{L}} + 2\frac{\delta}{\delta\sigma}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_{\mathfrak{L}}\sin z_{\mathfrak{L}}\cos^2 z_{\mathfrak{L}} \\
&\quad - 3\mathfrak{S}\delta_{\mathfrak{L}} - c\left(\mathfrak{T}\cos z_{\mathfrak{L}} + 3\mathfrak{S}\sin z_{\mathfrak{L}}\right).
\end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, les deux premiers termes sont de même nature; ils dépendent de la variation de la courbure totale sur la surface au voisinage

de la courbe $(\mathcal{L})$ et sur la courbe elle-même; les troisièmes termes sont les produits de $\mathcal{R}$, S ou $\mathcal{C}$ par les courbures géodésiques d'une des courbes du réseau orthogonal; enfin les derniers termes font intervenir la courbure géodésique de la courbe $(\mathcal{L})$ c'est-à-dire un élément du second ordre relatif à cette courbe. On remarquera que dans chacune des formules (23) les trois premiers termes sont connus quand on se donne l'élément linéaire de la surface (Σ) par la forme quadratique fondamentale et l'azimut z de la tangente à la courbe de base $(\mathcal{L})$; la courbure géodésique c de cette courbe n'entre que dans l'expression des derniers termes.

II. — CAS DE L'ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION.

Dans ce chapitre et les suivants, nous développerons la théorie générale qui précède dans le cas intéressant la géodésie où (Σ) est un ellipsoïde de révolution. Nous étudierons en particulier le cas où $(\mathcal{L})$ est une loxodromie, c'est-à-dire une courbe coupant les sections méridiennes sous un angle constant pour laquelle seront données des propriétés valables sur une surface de révolution quelconque. Nous indiquerons aussi la méthode de calcul pratique des tables de projection pour toutes les projections de la classe considérée en explicitant la correspondance ponctuelle entre un point de l'ellipsoïde défini par sa latitude et sa longitude et son homologue sur le plan.

13. Ellipsoïde de révolution. — Nous rappelons d'abord quelques définitions relatives à cette surface avec les notations classiques des géodésiens :

a, grand axe de l'ellipse méridienne;
b, petit axe de cette ellipse (axe de révolution);
$2c$, distance focale de l'ellipse méridienne;
α, aplatissement $\alpha = \dfrac{a-b}{a}$;
e^2, carré de l'exentricité $e^2 = \dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2}$;
e'^2, carré de la 2e excentricité :

$$e'^2 = \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2-b^2}{b^2} \qquad e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2};$$

N, grande normale, rayon de courbure de la section perpendiculaire au méridien; le centre de courbure, d'après le théorème de Meusnier, se trouve sur le petit axe de l'ellipse méridienne (axe de révolution de l'ellipsoïde);
ρ, rayon de courbure de l'ellipse méridienne;
L, latitude comptée à partir de l'équateur, positivement vers le Nord, négativement vers le Sud;

G, longitude comptée positivement vers l'Est, négativement vers l'Ouest à partir d'un méridien origine (méridien de Greenwich).

r, rayon du parallèle de latitude L ($r = N \cos L$);

z. azimut compté à partir du Nord positivement vers l'Est.

Les formules classiques qui donnent, en fonction de la latitude, les deux rayons de courbure principaux N et ρ sont :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}},$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}.$$

La courbure totale est :

$$\frac{1}{N\rho} = \frac{(1-e^2\sin^2 L)^2}{a^2(1-e^2)}. \tag{24}$$

Le rapport des deux courbures est :

$$\frac{N}{\rho} = 1 + e'^2\cos^2 L. \tag{25}$$

14. Choix du réseau orthogonal. Convergence des méridiens. — Nous prendrons comme réseau orthogonal sur l'ellipsoïde celui qui est formé par les méridiens et les parallèles; les deux paramètres u et v seront respectivement L et G; la forme quadratique fondamentale qui définit l'élément linéaire de la surface est :

$$\rho^2 dL^2 + r^2 dG^2.$$

Les variables s et t sont définies par le système différentiel :

$$\begin{cases} ds = \rho dL \\ dt = r dG. \end{cases}$$

Les méridiens sont des géodésiques particulières; leur courbure géodésique est nulle :

$$\gamma = 0.$$

Les parallèles sont des cercles; leur courbure géodésique est :

$$\delta = -\frac{\operatorname{tg} L}{N}.$$

Considérons une courbe $(\mathcal{L})$ tracée sur l'ellipsoïde qui coupe les méridiens sous l'angle z, la formule (5') donne la dérivée de z par rapport à l'arc :

$$\frac{dz}{d\sigma} = c + \frac{\operatorname{tg} L}{N}\sin z. \tag{26}$$

Cette formule condense plusieurs propriétés qui sont en général éparses dans les traités de géodésie.

1. *Équation de Clairaut.* — Dans le cas particulier où la courbe $(\mathcal{L})$ est une géodésique $c = 0$, la formule (26) se réduit à la relation :

$$\frac{dz}{d\sigma} = \frac{\operatorname{tg} L}{N} \sin z. \tag{27}$$

Il est facile de vérifier que :

$$\frac{dr}{dL} = -\rho \sin L \tag{28}$$

et comme :

$$d\sigma = \frac{ds}{\cos z} = \frac{\rho dL}{\cos z},$$

il vient :

$$\frac{\cos z dz}{\sin z} + \frac{dr}{r} = 0$$

et, en intégrant, on obtient la formule classique de Clairaut :

$$r \sin z = C^{te}. \tag{29}$$

2. *Courbure géodésique de la loxodromie.* — Dans le cas où la courbe $(\mathcal{L})$ est une loxodromie, l'azimut z est constant; la formule (26) nous donne alors l'expression de la courbure géodésique de la loxodromie :

$$c = -\frac{\operatorname{tg} L}{N} \sin z. \tag{30}$$

Comparant à (27), on voit que, si on considère une loxodromie et une géodésique tangentes, la courbure géodésique de la loxodromie et la dérivée par rapport à l'arc de l'azimut sur la géodésique sont égales en valeur absolue et de signes opposés.

3. *Convergence des méridiens.* — Si on intègre (26) le long de la courbe $(\mathcal{L})$ quelconque, on obtient la relation :

$$z - z_0 = \int_{\sigma_0}^{\sigma} c d\sigma + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\operatorname{tg} L}{N} \sin z d\sigma.$$

Comme $r dG = d\sigma \sin z$, la deuxième intégrale peut s'écrire ;

$$\Phi - \Phi_0 = \int_{G_0}^{G} \sin L dG.$$

La fonction Φ s'appelle la convergence des méridiens. Ainsi, sur une surface de révolution, la variation d'azimut d'une courbe quelconque est égale à l'intégrale de sa courbure géodésique augmentée de la variation de convergence des méridiens. Pour une géodésique, la variation d'azimut se réduit à la variation de convergence des méridiens. Pour une

loxodromie la variation d'azimut est nulle en vertu de la formule (30); l'intégrale de la courbure géodésique est alors égale et opposée à la variation de convergence des méridiens.

15. Coefficients du développement en série de K. — $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ s'obtiennent en remplaçant dans les formules (14) $\left(\frac{1}{\rho\rho'}\right)_2$ par $\left(\frac{1}{N\rho}\right)_2$ donné par la formule (24); on obtient :

$$(14\ bis)\qquad \begin{cases} \mathcal{R} = \left(\dfrac{\sin^2 z}{N\rho}\right)_2 \\ \mathcal{S} = -\left(\dfrac{\sin z \cos z}{N\rho}\right)_2 \\ \mathcal{T} = \left(\dfrac{\cos^2 z}{N\rho}\right)_2. \end{cases}$$

Pour avoir les coefficients des termes du 3e ordre, $\mathcal{O}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{X}$, il nous faut calculer les expressions :

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{1}{N\rho}\right)\right]_2, \qquad \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{1}{N\rho}\right)\right]_2 \text{ et } \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{N\rho}\right).$$

La courbure totale, dont la valeur est donnée par (24), est constante sur un parallèle et sa dérivée, suivant un méridien, a une expression simple quand on introduit la deuxième excentricité e' :

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial L}\left(\dfrac{1}{N\rho}\right) = -\dfrac{4e'^2}{N^2}\sin L\cos L \\ \dfrac{\partial}{\partial G}\left(\dfrac{1}{N\rho}\right) = 0. \end{cases}$$

La dérivée par rapport à l'arc σ se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{N\rho}\right) = -\frac{4e'^2}{N^2}\sin L\cos L\frac{\cos z}{\rho}.$$

Les formules (23) se simplifient légèrement, mais perdent leur symétrie :

$$(23\ bis)\qquad \begin{cases} \mathcal{O} = -\dfrac{4e'^2}{N^2\rho}\sin L\cos L\sin^2 z\,(1+2\cos^2 z) \\ \qquad\qquad - c\,(\mathcal{R}\sin z + 3\mathcal{S}\cos z) \\ \mathcal{V} = +\dfrac{8e'^2}{N^2\rho}\sin L\cos L\sin z\cos^3 z \\ \qquad\qquad - c\,(\mathcal{T}\cos z + 3\mathcal{S}\sin z) \\ \mathcal{W} = -\dfrac{4e'^2}{N^2\rho}\sin L\cos L\cos^2 z\,(1-2\sin^2 z) + \dfrac{\mathcal{R}\,\mathrm{tg}\,L}{N} \\ \qquad\qquad - c\,(\mathcal{R}\sin z + 3\mathcal{S}\cos z) \\ \mathcal{X} = -\dfrac{8e'^2}{N^2\rho}\sin L\cos L\sin z\cos^3 z + \dfrac{3\mathcal{S}\,\mathrm{tg}\,L}{N} \\ \qquad\qquad - c\,(\mathcal{T}\cos z + 3\mathcal{S}\sin z). \end{cases}$$

16. Équations des méridiens et des parallèles en projection. — Nous supposons dans ce paragraphe que nous avons pris comme origine, pour les développements en série de K et des courbures Γ et Δ, les points d'intersection du méridien ou du parallèle considérés avec la courbe de base $(\mathcal{L})$. Dans ces conditions, nous ne considérons que les points qui sont situés, soit sur le méridien étudié, soit sur le parallèle étudié; on aura dans un cas :

$$\Delta t = 0,$$

et dans l'autre cas :

$$\Delta s = 0;$$

l'accroissement non nul Δs ou Δt est mesuré sur la courbe envisagée et ces deux accroissements représentent dans ces cas particuliers des accroissements d'abcisse curviligne sur les méridiens ou sur les parallèles.

D'après la formule (12), on trouve ainsi pour un méridien :

$$\text{(32)} \qquad K = 1 + \frac{1}{2}\mathcal{R}s^2 + \frac{1}{6}\mathcal{O}s^3 + \dots$$

en prenant comme origine des abcisses curvilignes sur le méridien $(s = 0)$, son point d'intersection avec $(\mathcal{L})$.

D'après la même formule, on trouve pour le parallèle :

$$\text{(33)} \qquad K = 1 + \frac{1}{2}\mathcal{E}t^2 + \frac{1}{6}\mathcal{X}t^3 + \dots$$

en prenant comme origine des abcisses curvilignes sur le parallèle $(t = 0)$, son point d'intersection avec $(\mathcal{L})$.

Dans les mêmes conditions, les courbures Γ et Δ des projections de ces deux courbes s'obtiennent par application des formules (10') :

$$\text{(34)} \qquad \begin{cases} \Gamma = \mathcal{S}s + \frac{1}{2}\mathcal{O}s^2 + \dots \\ \Delta = -\frac{\operatorname{tg} L}{N}\left(1 + \frac{1}{2}\mathcal{E}t^2\right) + \mathcal{S}t + \frac{1}{2}\mathcal{W}t^2 + \dots \end{cases}$$

Soient ξ et η deux axes rectangulaires se coupant en projection sur la courbe transformée de $(\mathcal{L})$ et tangents respectivement au parallèle et au méridien qui passent par ce point.

Si S représente l'arc de méridien en projection et T l'arc de parallèle en projection, comptés respectivement à partir des intersections de $(\mathcal{L})$ avec le méridien et avec le parallèle, prises comme origines, en désignant par $\Gamma_{\mathcal{L}}$, $\Gamma'_{\mathcal{L}}$, $\Gamma''_{\mathcal{L}}$, $\Delta_{\mathcal{L}}$, $\Delta'_{\mathcal{L}}$ $\Delta''_{\mathcal{L}}$... les valeurs des courbures respectives et de leurs dérivées successives aux origines, les équations paramétriques du méridien sont :

$$\text{(35)} \qquad \begin{cases} \xi = -\frac{\Gamma_{\mathcal{L}}}{2}S^2 - \frac{\Gamma'_{\mathcal{L}}}{2}S^3 + \frac{\Gamma^3_{\mathcal{L}} - \Gamma''_{\mathcal{L}}}{24}S^4 + \dots \\ \eta = S \qquad - \frac{\Gamma^2_{\mathcal{L}}}{6}S^3 - \frac{\Gamma_{\mathcal{L}}\,\Gamma'_{\mathcal{L}}}{8}S^4 + \dots, \end{cases}$$

celles du parallèle sont :

$$(36)\qquad \begin{cases} \xi = \mathrm{T} - \frac{\Delta_{\mathfrak{L}}^2}{6}\mathrm{T}^3 - \frac{\Delta_{\mathfrak{L}}\Delta'_{\mathfrak{L}}}{8}\mathrm{T}^4 + \dots \\ \eta = -\frac{\Delta_{\mathfrak{L}}}{2}\mathrm{T}^2 - \frac{\Delta'_{\mathfrak{L}}}{6}\mathrm{T}^3 + \frac{\Delta_{\mathfrak{L}}^3 - \Delta''_{\mathfrak{L}}}{24}\mathrm{T}^4 + \dots \end{cases}$$

Les tables de l'ellipsoïde donnent les longueurs de l'arc de méridien d'une minute et de l'arc de parallèle d'une minute aux différentes latitudes. Pour les calculs de la projection il serait intéressant d'avoir comme paramètres dans les équations précédentes les arcs s et t sur l'ellipsoïde à la place des arcs S et T en projection. Il suffit, pour faire le changement de paramètres, d'intégrer le système différentiel :

$$\frac{d\mathrm{S}}{ds} = \frac{d\mathrm{T}}{dt} = \mathrm{K}.$$

Sur le méridien, en partant du point d'intersection avec $(\mathfrak{L})$, on a d'après (32) :

$$\frac{d\mathrm{S}}{ds} = 1 + \frac{1}{2}\mathfrak{R}s^2 + \frac{1}{6}\mathfrak{V}s^3 + \dots$$

d'où :

$$\mathrm{S} = s + \frac{1}{6}\mathfrak{R}s^3 + \frac{1}{24}\mathfrak{V}s^4 + \dots$$

de même sur le parallèle d'après (33) :

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = 1 + \frac{1}{2}\mathfrak{T}t^2 + \frac{1}{6}\mathfrak{X}t^3 + \dots$$

d'où :

$$\mathrm{T} = t + \frac{1}{6}\mathfrak{T}t^3 + \frac{1}{24}\mathfrak{X}t^4 + \dots$$

Comme $\mathrm{S} = s$ et $\mathrm{T} = t$ au troisième ordre près, les valeurs qui nous intéressent des dérivées de Γ et de Δ restent les mêmes dans le changement de variable. En effet :

$$\frac{d\Gamma}{ds} = \frac{d\Gamma}{d\mathrm{S}} \cdot \frac{d\mathrm{S}}{ds} = \mathrm{K}\frac{d\Gamma}{d\mathrm{S}},$$

$$\frac{d^2\Gamma}{ds^2} = \frac{d\mathrm{K}}{ds} \cdot \frac{d\Gamma}{d\mathrm{S}} + \mathrm{K}^2\frac{d^2\Gamma}{d\mathrm{S}^2} = \mathfrak{R}\frac{d\Gamma}{d\mathrm{S}}s + \mathrm{K}^2\frac{d^2\Gamma}{d\mathrm{S}^2}.$$

A l'origine pour $s = 0$, on a donc :

$$\left(\frac{d\Gamma}{ds}\right)_{\mathfrak{L}} = \left(\frac{d\Gamma}{d\mathrm{S}}\right)_{\mathfrak{L}},$$

$$\left(\frac{d^2\Gamma}{ds^2}\right)_{\mathfrak{L}} = \left(\frac{d^2\Gamma}{d\mathrm{S}^2}\right)_{\mathfrak{L}}.$$

Le même raisonnement montrerait que pour $t = 0$:

$$\left(\frac{d\Delta}{dt}\right)_{\mathfrak{L}} = \left(\frac{d\Delta}{d\mathrm{T}}\right)_{\mathfrak{L}},$$

$$\left(\frac{d^2\Delta}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2\Delta}{d\mathrm{T}^2}\right)_{\mathfrak{L}}.$$

La dérivation des formules (34) donne :

$$\begin{cases} \Gamma_{\mathfrak{L}} = 0 \\ \Gamma'_{\mathfrak{L}} = \mathcal{S} \\ \Gamma''_{\mathfrak{L}} = \mathcal{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta_{\mathfrak{L}} = -\left(\dfrac{\mathrm{tg\,L}}{\mathrm{N}}\right)_{\mathfrak{L}} \\ \Delta'_{\mathfrak{L}} = \mathcal{S} \\ \Delta''_{\mathfrak{L}} = -\mathcal{C}\left(\dfrac{\mathrm{tg\,L}}{\mathrm{N}}\right)_{\mathfrak{L}} + \mathcal{W}. \end{cases}$$

Dans ces conditions, les équations (35) et (36) prennent les formes suivantes :

$$(35') \qquad \begin{cases} \xi = -\dfrac{\mathcal{S}s^3}{6} - \dfrac{\mathcal{V}}{24}s^4 + \dots \\ \eta = s + \dfrac{\mathcal{R}}{6}s^3 + \dfrac{\mathcal{V}}{24}s^4 + \dots \end{cases}$$

$$(36') \qquad \begin{cases} \xi = t - \dfrac{1}{6}\left[\left(\dfrac{\mathrm{tg\,L}}{\mathrm{N}}\right)^2_{\mathfrak{L}} - \mathcal{C}\right]t^3 + \dfrac{1}{24}\left[3\left(\dfrac{\mathrm{tg\,L}}{\mathrm{N}}\right)_{\mathfrak{L}}\mathcal{S} + \mathcal{X}\right]t^4 + \dots \\ \eta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\mathrm{tg\,L}}{\mathrm{N}}\right)_{\mathfrak{L}}t^2 - \dfrac{\mathcal{S}}{6}t^3 - \dfrac{1}{24}\left[\left(\dfrac{\mathrm{tg\,L}}{\mathrm{N}}\right)^3_{\mathfrak{L}} - 5\left(\dfrac{\mathrm{tg\,L}}{\mathrm{N}}\right)_{\mathfrak{L}}\mathcal{C} + \mathcal{W}\right]t^4 + \dots \end{cases}$$

qui sont particulièrement adaptées au calcul, avec l'aide des tables de l'ellipsoïde, des intersections des méridiens et des parallèles.

17. Projection de la courbe ($\mathfrak{L}$). Cas limite où elle se réduit à un point. — Comme le rapport de similitude K est égal à l'unité en tout point de la courbe ($\mathfrak{L}$), l'élément d'arc est conservé; de plus, comme le gradient du rapport K est nul, le long de cette courbe la courbure géodésique est conservée; dans le cas de la représentation plane de la surface (Σ), la courbure géodésique devient la courbure de la transformée plane de ($\mathfrak{L}$).

Dans le cas particulier où $(\mathcal{L})$ est une géodésique de la surface, la transformée plane de $(\mathcal{L})$ est une droite sur laquelle l'arc de géodésique se développe en vraie grandeur. La fonction Φ, convergence des méridiens le long de cette géodésique se conserve aussi en projection et donne l'angle dont tournent les axes ξ et η, définis plus haut quand on décrit la droite image de la géodésique.

Si on adopte comme courbe $(\mathcal{L})$ une loxodromie, la transformée est une courbe où la fonction z reste constante par définition et l'angle dont tournent en projection les axes ξ et η ne dépend donc que de l'intégrale de la courbure géodésique de la loxodromie ; par conséquent cet angle est égal à la variation de la fonction Φ, définie au paragraphe 14.

Si la courbure géodésique est constante sur $(\mathcal{L})$ la transformée plane de $(\mathcal{L})$ sera un cercle. Le cas particulier où la surface (Σ) est une sphère est intéressant : un petit cercle quelconque a une courbure géodésique constante. Si α est l'angle du cône de révolution circonscrit à la sphère le long de ce cercle, la courbure géodésique est égale à la courbure du cercle multipliée par $\sin\alpha$; le rayon du cercle transformé est donc égal à la longueur de la génératrice du cône circonscrit : à un petit cercle complet de la sphère correspond un arc de cercle dans le plan dont l'angle au centre est égal à $2\pi \sin\alpha$.

Quand la courbe de base diminue progressivement pour se réduire à la limite à un point, la méthode qui a été exposée tombe en défaut : la condition, pour une projection, d'avoir son module de déformation linéaire stationnaire en un point ne suffit pas pour la définir. Tout ce qu'on peut dire, c'est qu'au voisinage du point central, le développement de K a la forme (6′), les coefficients des termes du second ordre satisfaisant à la seule équation de condition (13) :

$$A_{20} + A_{02} = \left(\frac{1}{N\rho}\right)_0 .$$

Il existe une famille de projections possibles ; pour classer ces projections, on considère l'indicatrice au point central de la surface représentée par le développement en série de K : on distingue les projections à indicatrices hyperbolique, elliptique et parabolique. Comme les champs d'application en géodésie sont des domaines limités et fermés, le cas de l'indicatrice hyperbolique n'a pas d'intérêt pratique. Un cas particulier intéressant est celui où l'indicatrice est circulaire : ce qui correspond pour la sphère à la projection stéréographique. Plus généralement, on désigne sous le nom de projection stéréographique de l'ellipsoïde, la projection conforme centrale à indicatrice circulaire, la forme des termes d'ordre supérieur du développement en série n'étant pas précisée.

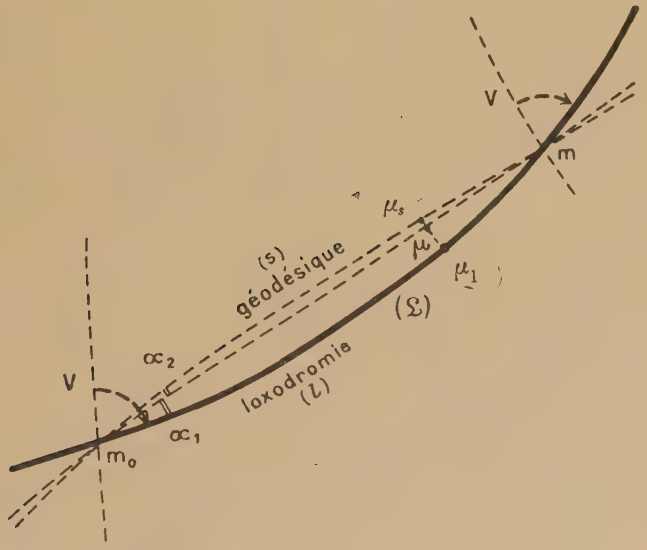
Comme $A_{20} = A_{02}$, la valeur commune des deux coefficients est $\frac{1}{2N_0\rho_0}$ et le développement en série de K débute de la façon suivante :

$$K = 1 + \frac{1}{4N_0\rho_0}(\Delta s^2 + \Delta t^2) + \dots$$

quand on prend l'origine au point central de la projection.

III. LA COURBE ($\mathcal{L}$) EST UNE LOXODROMIE. APPLICATION AU CALCUL DE LA CORRECTION DE GIVRY.

La considération de la projection conforme de déformation stationnaire dans le cas où la courbe ($\mathcal{L}$) est une loxodromie, fournit une méthode nouvelle pour le calcul sur une surface de révolution quelconque de la correction que l'Ingénieur hydrographe Givry a découvert et dont il a donné l'expression pour la sphère. Elle permet aussi de développer en série la différence entre les longueurs des arcs de loxodromie et de géodé-



- fig. 6 -

sique joignant deux points voisins de la surface de révolution. Les résultats obtenus sont appliqués à l'ellipsoïde de révolution et comparés aux résultats classiques connus sur la sphère.

Appelons c la courbure géodésique de la loxodromie, nous avons démontré dans le chapitre II (équation 30) que :

$$c = -\frac{\operatorname{tg} L}{N} \sin V$$

si on appelle V l'azimut constant de la loxodromie.

Considérons la projection conforme de déformation stationnaire ayant pour courbe de base la loxodromie ($\mathcal{L}$) de la surface (Σ). Prenons deux points voisins M_0 et M sur cette courbe ($\mathcal{L}$) et traçons la géodésique qui les joint. Dans la projection conforme, la loxodromie se développe en vraie grandeur, la courbure en projection étant égale à la courbure géodé-

sique de la loxodromie sur la surface de révolution (Σ). Les deux points M_0 et M ont pour homologues deux points m_0 et m et les arcs m_0m et M_0M sont égaux. La tranformée de la géodésique est une courbe qui présente en m_0 et m deux points d'inflexion et dont la courbure γ, ne dépendant que de la variation du rapport de similitude dans la direction normale, est égale à $-\frac{1}{K^2}\frac{dK}{dn}$ (fig. 6).

z_0 et z sont les gisements de la géodésique en m et m_0; l'arc de loxodromie est désigné par la variable l aussi bien en projection que sur la surface de révolution, l'arc de géodésique par s en projection et par S sur la surface (Σ).

$c, c', c'', \ldots$ représentent la courbure de la loxodromie et ses dérivées successives prises par rapport à l'arc l.

$\gamma, \gamma', \gamma'', \ldots$ représente la courbure géodésique de la géodésique en projection et ses dérivées successives par rapport à l'arc s.

Les indices 0, 2, 3 correspondent respectivement aux valeurs prises par ces diverses fonctions au point m_0, au milieu de m_0m et au tiers de m_0m à partir de m_0.

Considérons la droite qui joint m_0m et désignons par α_1 et α_2 respectivement les angles des tangentes en m_0 à la loxodromie et à la géodésique avec la droite m_0m. On a :

$$(37)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2}c_3 l + \frac{1}{7^2}c_2'' l^3 + \ldots \\ \alpha_2 = \frac{1}{2}\gamma_3 s + \frac{1}{7^2}\gamma_2'' s^3 + \ldots \end{cases}$$

Si d représente la distance m_0m en projection, on a les relations suivantes :

$$(38)\qquad \begin{cases} l - d = \frac{1}{24}c_2^2 l^3 + \left[\frac{c_0 c_0''}{480} + \frac{c_0'^2}{1440} - \frac{c_0^4}{1920}\right] l^5 + \ldots \\ s - d = \frac{1}{24}\gamma_2^2 s^3 + \ldots \end{cases}$$

Quant à la différence de longueur entre la géodésique et sa transformée plane, elle est donnée par la formule :

$$(39)\qquad s - S = \int_0^S (K - 1)\, dS.$$

Les formules (37) permettent le calcul de la correction de Givry, qui est égale à $\alpha_1 + \alpha_2$; la loxodromie et la géodésique ont des courbures opposées et se situent de part et d'autre de la droite m_0m; le rapport de similitude K croît à mesure qu'on s'éloigne de la loxodromie; ces situations respectives des deux courbes sont seules compatibles avec le fait que la géodésique a la propriété de représenter le plus court chemin sur la surface de M_0 à M. En effet, si en projection, la géodésique qui est très rapprochée de la corde m_0m était par rapport à cette corde du même côté

que la loxodromie, elle serait forcément plus longue que la corde en projection et de plus le rapport K augmentant quand on s'éloigne de la loxodromie cette corde correspondrait sur la surface à une courbe plus courte que la géodésique : ce qui est impossible par hypothèse; donc, les positions relatives indiquées sont seules compatibles avec les propriétés de la géodésique.

18. Calcul de la correction angulaire de Givry et de la différence de longueur des deux arcs. — Considérons sur la loxodromie le point μ_l d'abcisse curviligne λ, comptée à partir de m_0; la perpendiculaire abaissée de ce point sur la corde m_0m la rencontre en μ et son prolongement rencontre la transformée de la géodésique en μ_s. La distance $\mu\mu_l$ a pour expression :

$$\mu\mu_l = \frac{1}{2} c_2 \lambda (\lambda - l),$$

quand on néglige la variation de courbure sur la loxodromie. Le rapport de similitude au point μ est donné dans ces conditions par :

$$K_\mu = 1 + \frac{(\mu\mu_l)^2}{2N\rho} + \ldots = 1 + \frac{c_2^2 \lambda^2 (\lambda - l)^2}{8N\rho} + \ldots.$$

La courbure γ de la géodésique en projection est égale avec la même approximation à la dérivée de K_μ dans la direction normale, c'est-à-dire à $-\frac{\mu\mu_l}{N\rho}$ et on a :

$$\gamma = -\frac{c_2 \lambda (\lambda - l)}{2N\rho},$$

courbure positive pour tous les points de l'arc m_0m.

L'application de la formule (37) donne :

$$\gamma_3 = +\frac{c_2 l^2}{9N\rho},$$

$$\gamma'' = -\frac{c_2}{2N\rho};$$

d'où :

$$\alpha_2 = +\frac{c_2 l^2}{24N\rho} s.$$

Le premier terme du développement de α_2 est du troisième ordre; la correction de Givry est donc :

$$C = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2} c_3 l + \frac{1}{72} \left(c_2'' + \frac{3 c_0}{N\rho} \right) l_3 + \ldots \quad (40)$$

Pour le calcul de la différence des deux arcs nous écrirons :

$$\varepsilon = l - S = (l - d) + (d - s) + (s - S).$$

D'après les formules (38) on a :

$$(l-d)=\frac{1}{24}c_2^2l^3+\left[\frac{c_0c_0''}{480}+\frac{c_0'^2}{1440}-\frac{c_0^4}{1920}\right]l^5+\dots$$

La courbure γ est nulle en m_0 et en m ; sa valeur absolue maxima, atteinte pour le milieu de m_0m, est $\frac{c_0l^2}{8N\rho}$ et on a :

$$d-s=-\frac{1}{24}\frac{c_2^2l^4}{64N^2\rho^2}s^3+\dots$$

Le premier terme du développement de $(d-s)$ est du 7e ordre : il est négligeable ; par contre, le rapport de similitude introduit une correction du 5e ordre dont il y a lieu de tenir compte ; la relation (39) donne :

$$s-S=\int_0^S\frac{c_2^2\lambda^2(\lambda-l)^2}{8N\rho}dS.$$

Pour avoir la partie principale de cette intégrale, on peut faire $dS=ds=d\lambda$ et $S=l$, ce qui donne

$$(s-S)=\int_0^l\frac{c_2^2\lambda^2(\lambda-l)^2}{8N\rho}d\lambda=\frac{c_2^2l^5}{2240N\rho}+\dots$$

Il en résulte pour ε la valeur suivante :

$$\varepsilon=\frac{1}{24}c_2^2l^3+\left[\frac{c_0c_0''}{480}+\frac{c_0'^2}{1440}-\frac{c_0^4}{1920}+\frac{c_0^2}{240N\rho}\right]l^5+\dots \tag{41}$$

19. Formules trouvées par Givry et Bravais. — L'Ingénieur hydrographe A.-P. Givry a découvert en 1829 la correction angulaire C que nous venons de calculer. En projection de Mercator, la loxodromie est représentée par une droite qui coupe les méridiens sous un angle constant : la géodésique est représentée par une courbe toujours située par rapport à la loxodromie du côté qui contient l'un ou l'autre pôle suivant qu'on se trouve dans l'hémisphère boréal ou dans l'hémisphère austral. Givry a calculé l'expression sur la sphère de l'angle que font entre eux les arcs de ces deux courbes joignant deux points et il a trouvé la formule suivante (1) :

$$V-Z_0=\frac{1}{2}\psi\sin L_0-\frac{1}{12}\psi^2\operatorname{cotg}Z_0(1-3\cos^2L_0)+\frac{1}{24}\psi^3\sin L_0\operatorname{cotg}^2Z_0(1-6\cos^2L_0)+\dots \tag{42}$$

dans laquelle il a été négligé sciemment le petit terme :

$$\frac{1}{24}\psi^3\sin L_0\cos 2L_0.$$

(1) A.-P. Givry. — Mémoire sur l'emploi des chronomètres. Supplément. Article II, p. 151 à 160. *Extrait des Annales Maritimes et Coloniales.* Paris, 1846).

V, relèvement sur la carte réduite (carte de Mercator)
Z_0, azimut de la géodésique.
L_0, latitude de l'origine (point m_0).
ψ, différence de longitude entre les points m_0 et m.

Quand on remplace c par sa valeur dans la formule (40), il s'introduit le paramètre V, angle constant de la loxodromie avec les méridiens. Nous allons modifier un peu la formule (42), de façon à ce qu'on puisse la comparer plus facilement à la formule que nous établirons dans ce qui suit. Pour éliminer l'angle Z_0 nous le remplaçons par $V - \frac{1}{2}\psi \sin L_0$, approximation suffisante si on se limite au 3e ordre par rapport à ψ. On aura :

$$\operatorname{cotg} Z_0 = \operatorname{cotg} V + \frac{1}{2}\psi \sin L_0 (1 + \operatorname{cotg}^2 V)$$

et la formule (41) devient ;

$$(43) \qquad V - Z_0 = \frac{1}{2}\psi \sin L_0 - \frac{1}{12}\psi^2 \operatorname{cotg} V (1 - 3\cos^2 L_0) + \frac{1}{24}\psi^3 \sin L_0 \cos^2 L_0 (1 - 3 \operatorname{cotg}^2 V) + \cdots$$

si on tient compte de tous les termes du 3e ordre, y compris le terme $\frac{1}{24}\psi^3 \sin L_0 \cos 2L_0$ négligé par Givry.

Dans une thèse d'astronomie (1), A. Bravais a donné à la formule de Givry une forme légèrement différente en faisant intervenir la latitude moyenne : L_2.

$$\sin L_2 = \sin L_0 + \frac{1}{2}\psi \operatorname{cotg} V \cos^2 L_0$$

au 2e ordre près et par suite :

$$(44) \qquad V - Z_0 = \frac{1}{2}\psi \sin L_2 - \frac{1}{12}\psi^2 \operatorname{cotg} V + \cdots$$

20. Transformation de la formule (40). — Nous allons transformer la formule que nous avons établie de façon à pouvoir la comparer aux expressions classiques de Givry et de Bravais. La formule (40) s'applique à une surface de révolution quelconque, nous supposerons dans ce qui va suivre que la surface est un ellipsoïde de révolution dont le carré de la deuxième excentricité est représenté par e'^2. Les deux normales principales sont presque égales et leur rapport est :

$$\frac{N}{\rho} = 1 + e'^2 \cos^2 L.$$

(1) Thèse d'Astronomie sur les méthodes employées dans les levés sous voiles (Lyon, 1837).

Il est intéressant pour la simplification des formules de faire apparaître comme variable le rayon r du parallèle dont la dérivée par rapport à L est égale à $-\rho \sin L$ (voir chapitre II).

La courbure géodésique de la loxodromie et ses dérivées première et seconde peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$(45)\qquad \begin{cases} c = \dfrac{\sin V \sin L}{r}, \\ c' = \dfrac{\sin V \cos V}{r^2}(1 + e'^2 \cos^4 L), \\ c'' = \dfrac{\sin V \cos^2 V \sin L}{r^3}(2 - e'^2 \cos^4 L - 3e'^4 \cos^6 L). \end{cases}$$

Le développement de l en fonction de ψ s'obtient en partant de l'équation différentielle de la loxodromie :

$$dl \sin V = r d\psi$$

que l'on intègre de 0 à ψ :

$$l \sin V = \int_0^{\psi} \left[r_0 + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)_0 \psi + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 r}{d\psi^2}\right)_0 \psi^2 + \cdots \right] d\psi$$

où :

$$\frac{dr}{d\psi} = -r \sin L \operatorname{cotg} V$$

$$\frac{d^2 r}{d\psi^2} = r \operatorname{cotg}^2 V (\sin^2 L - \cos^2 L - e'^2 \cos^4 L);$$

si le développement est fait à partir du point m_0 on a :

$$(46)\qquad l \sin V = r_0 \psi - \frac{1}{2}\psi^2 r_0 \sin L_0 \operatorname{cotg} V + \frac{1}{6}\psi^3 r_0 \operatorname{cotg} V (\sin^2 L_0 - \cos^2 L_0 - e'^2 \cos^4 L_0) + \cdots;$$

si le développement est fait à partir du milieu de $m_0 m$, on a :

$$(46')\qquad l \sin V = r_2 \psi + \frac{1}{24}\psi^3 r_2 \operatorname{cotg} V (\sin^2 L_2 - \cos^2 L_2 - e'^2 \cos^4 L_2) + \cdots$$

Pour obtenir la formule analogue à (43) pour l'ellipsoïde, il faut remplacer dans (40) c_3 par son développement :

$$c_3 = c_0 + c'_0 \frac{l}{3} + c''_0 \frac{l^2}{18} + \cdots,$$

ce qui donne :

$$C = \frac{1}{2} c_0 l + \frac{1}{6} c'_0 l^2 + \frac{1}{24}\left(c''_0 + \frac{c_0}{N\rho}\right) l^3 + \cdots,$$

car il est légitime de confondre c_0'' et c_2'', c_0 et c_2 dans le dernier terme du développement.

Tous calculs effectués, on obtient alors :

$$(47)\qquad C = \frac{1}{2}\psi \sin L_0 - \frac{1}{12}\psi^2 \operatorname{cotg} V (1 - 3\cos^2 L_0 - 2e'^2 \cos^4 L_0)$$
$$+ \frac{1}{24}\psi^3 \sin L_0 \cos^2 L_0 (1 + e'^2 \cos^2 L_0)[1 - 3\operatorname{cotg}^2 V (1 + e'^2 \cos^2 L_0)] + \cdots$$

La comparaison avec la formule de Givry sous la forme (43) montre que la forme ellipsoïdale de la terre modifie légèrement les coefficients des termes du deuxième et du troisième ordre.

Le développement, en prenant comme origine le milieu de $m_0 m$, conduit à une expression analogue à celle obtenue par Bravais :

$$c_3 = c_2 - c_2' \frac{l}{6} + c_2'' \frac{l^2}{72} + \cdots$$
$$C = \frac{1}{2} c_2 l - \frac{1}{12} c_2' l^2 + \frac{1}{144}\left(3c_2'' + \frac{6c_2}{N\rho}\right) l^3 + \cdots$$

En tenant compte de la formule (46'), on trouve :

$$(48)\qquad C = \frac{1}{2}\psi \sin L_2 - \frac{1}{12}\psi^2 \operatorname{cotg} V (1 + e'^2 \cos^4 L_2)$$
$$+ \frac{1}{24}\psi^3 \sin L_2 \left[\cos^2 L_2 (1 + e'^2 \cos^2 L_2) - \frac{3}{2}\operatorname{cotg}^2 V (1 - e'^4 \cos^6 L_2)\right].$$

Si on se reporte à la formule (44) de Bravais, on voit que la forme ellipsoïdale de la terre introduit dans le terme du deuxième ordre le facteur :

$$(1 + e'^2 \cos^4 L_2).$$

21. Transformation de la formule (41). — Si on néglige le terme du cinquième ordre de la formule (41), on peut, en conservant le même ordre d'approximation, prendre :

$$c_2 = \frac{\sin V \sin L_2}{r_2}$$
$$l \sin V = r_2 \psi$$

Cela nous donne la formule :

$$(49)\qquad \varepsilon = \frac{r_2 \sin^2 L_2}{24 \sin V}\psi^3$$

qui est exacte au cinquième ordre près.

Pour le calcul du terme du cinquième ordre, il est indifférent de prendre les valeurs de la courbure et de ses dérivées à l'origine ou en un point quelconque de l'arc de loxodromie, par exemple au milieu de cet arc.

On peut remplacer :

cc'' par $\frac{\sin^2 V \cos^2 V \sin^2 L}{r^4}(2 - e'^2 \cos^4 L - 3e'^4 \cos^6 L)$

c'^2 par $\frac{\sin^2 V \cos^2 V}{r^4}(1 + e'^2 \cos^4 L)$

c^4 par $\frac{\sin^4 V \sin^4 L}{r^4}$

$\frac{c^2}{N\rho}$ par $\frac{\sin^2 V \sin^2 L \cos^2 L}{r^4}(1 + e'^2 \cos^2 L)$

et enfin :

$l \sin V$ par $r_2\psi + \frac{1}{24} r_2 \psi^3 \operatorname{cotg} V (\sin^2 L_2 - \cos^2 L_2 - e'^2 \cos^4 L_2)$.

Tous calculs effectués, on trouve la formule suivante :

$$(50)\quad \varepsilon = \frac{r_2 \sin^2 L_2}{24 \sin V}\psi^3 \left\{ 1 + \psi^2 \left[\frac{1}{8} \operatorname{cotg} V (\sin^2 L - \cos^2 L - e'^2 \cos^4 L) \right.\right.$$
$$+ \frac{\operatorname{cotg}^2 V}{20}(2 - e'^2 \cos^4 L - 3e'^4 \cos^6 L) + \frac{\operatorname{cotg}^2 V}{60}(1 + \operatorname{cotg}^2 V)(1 + e'^2 \cos^4 L)^2$$
$$\left.\left. - \frac{1}{80} \sin^2 L + \frac{1}{10} \cos^2 L (1 + \operatorname{cotg}^2 V)(1 + e'^2 \cos^2 L) \right] \right\}$$

qui contient tous les termes du cinquième ordre du développement en série, les quantités r et L étant prises au milieu de l'arc de loxodromie pour le terme principal en ψ^3 et en un point indifférent de cet arc pour le coefficient du terme ψ^5.

La formule (50) est analogue à celle que nous avons établie pour la différence angulaire C. La différence des longitudes ψ se calcule facilement quand les deux extrémités M_0 et M sont données par leurs coordonnées géographiques et bien que cette formule apparaisse plus compliquée que sous sa forme (41), elle peut dans la pratique être plus intéressante.

IV. PROJECTIONS CLASSIQUES (Mercator, Lambert et Gauss).

Les projections classiques de Mercator, Gauss et Lambert sont des cas particuliers de la projection générale étudiée dans le chapitre I. La projection de Mercator est elle-même un cas particulier de la projection de Lambert; dans ces deux projections, le rapport de similitude K est fonction de la latitude seule et l'équation aux dérivées partielles (II) devient une équation différentielle du second ordre à une seule variable :

$$(51)\qquad \frac{K^3}{N} = \frac{K}{r}\frac{d}{dL}\left(\frac{r}{\rho}\frac{dK}{dL}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{dK}{dL}\right)^2.$$

Il est facile de vérifier que :

$$(52)\qquad \frac{dK}{dL} = \frac{K\rho}{r}(\sin L - \sin L_0)$$

est intégrale première de l'équation (51); L_0 est la latitude du parallèle origine de la projection Lambert. Pour la projection de Mercator, il faut prendre L_0 égal à zéro, latitude de l'équateur.

Dans ce cas particulier, l'équation différentielle du premier ordre (52) se simplifie et devient :

$$\frac{dK}{K} = \frac{\rho \sin L dL}{r}. \tag{53}$$

Comme : $\frac{dr}{dL} = -\rho \sin L$, l'intégration est immédiate et donne :

$$K = \frac{a}{r}, \tag{54}$$

formule classique de cette projection.

L'application des résultats établis au chapitre II dans le cas de l'ellipsoïde de révolution permet de calculer au voisinage de leur courbe de base respective, les premiers termes du développement des projections de Mercator, de Gauss et de Lambert.

Dans le cas de la projection de Mercator, ce développement n'a pas d'intérêt pratique parce que le problème est soluble à l'aide des fonctions élémentaires; et il existe des tables dites « latitudes croissantes » pour construire le canevas de la projection. Au contraire, dans le cas de la projection de Gauss et de la projection Lambert, les développements obtenus peuvent être utilisés pratiquement en géodésie; ils présentent l'avantage de fournir les expressions exactes des coefficients alors que les formules classiques, utilisées, ne donnent souvent qu'une valeur approchée des coefficients pour les termes du quatrième ordre.

22. Projection de Mercator. — L'application des formules (14 *bis*) et (23 *bis*) donne :

$$\operatorname{tg} L = 0,$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{a\rho_0}, \quad \mathfrak{S} = 0, \quad \mathfrak{T} = 0,$$

$$\mathfrak{V} = 0, \quad \mathfrak{Y} = 0, \quad \mathfrak{W} = 0, \quad \mathfrak{X} = 0.$$

La courbe transformée de l'équateur est une droite et le système (35') fournit les équations paramétriques des courbes transformées des méridiens :

$$\begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = s + \frac{1}{6a\rho_0} s^3 + \cdots \end{cases} \tag{55}$$

Ce sont des droites perpendiculaires à l'équateur; les parallèles sont aussi des droites et leur distance à l'équateur est représentée par η qui est le début du développement en série de la fonction « latitude croissante ».

La fonction η s'obtient par intégration à l'aide des fonctions élémentaires :

$$\eta = \int_0^L K ds = \int_0^L \frac{a ds}{r},$$

expression qui peut s'intégrer facilement si on remplace ρ et N par leurs valeurs en fonction de la latitude (paragraphe 14) :

$$\eta = a \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L}{2}\right) - \frac{ae}{2} \log \frac{1 + e \sin L}{1 - e \sin L}. \tag{55 bis}$$

23. Projection de Gauss. — La courbe $(\mathcal{L})$ est un méridien.

$$z = 0, \qquad c = 0,$$

$$\mathcal{R} = 0, \qquad \mathcal{S} = 0, \qquad \mathcal{T} = \frac{1}{N\rho},$$

$$\mathcal{U} = 0, \qquad \mathcal{V} = 0, \qquad \mathcal{W} = -\frac{4e'^2}{N^2\rho} \sin L \cos L, \qquad \mathcal{X} = 0$$

d'après les formules (14 *bis*) et (23 *bis*).

Le méridien origine a pour équations :

$$\begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = s. \end{cases}$$

Le méridien se développe suivant une droite en vraie grandeur.

Les équations paramétriques du parallèle de latitude L sont :

$$(56) \quad \begin{cases} \xi = t - \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\operatorname{tg} L}{N}\right)_2^2 - \left(\frac{1}{N\rho}\right)_2\right] t^3 + \dots \\ \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tg} L}{N}\right)_2 t^2 - \frac{1}{24}\left[\left(\frac{\operatorname{tg} L}{N}\right)_2^3 - 5\left(\frac{\operatorname{tg} L}{N}\right)_2 \cdot \left(\frac{1}{N\rho}\right)_2 \right. \\ \qquad\qquad \left. - \left(\frac{4e'^2}{N^2\rho} \sin L \cos L\right)_2\right] t^4 + \dots \end{cases}$$

La méthode classique pour l'établissement des formules pratiques de cette projection est dûe aux auteurs allemands O. Schreiber et L. Krüger [1]. Elle dérive de la théorie générale des fonctions analytiques; nous démontrons ci-dessous que le calcul peut-être conduit de manière à obtenir les équations du parallèle sous la forme (56).

Considérons les deux fonctions λ et τ, coordonnées rectangulaires dans la projection de Mercator :

λ, proportionnel à la « latitude croissante »,

τ, proportionnel à la longitude.

[1] *Rapport sur les Projections* par M. P. Tardi (Travaux de l'Association de Géodésie de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale. 6e Assemblée Générale, Edimbourg 1936).

Si le coefficient de proportionalité est égal à a, grand axe de l'ellipsoïde, ces fonctions vérifient les équations différentielles:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{d\tau}{dt} = \frac{a}{r}. \tag{57}$$

Soit $\lambda + i\tau$ l'affixe d'un point du plan de la variable complexe, toutes les projections conformes de l'ellipsoïde sur le plan correspondent à une affixe $\eta + i\xi$, fonction analytique de $\lambda + i\tau$:

$$\eta + i\xi = F(\lambda + i\tau).$$

Dans le cas particulier de la projection de Gauss, le méridien central se développe en vraie grandeur suivant une droite; cela détermine complètement la fonction analytique F, car pour :

$$\iota = 0, \qquad \tau = 0, \qquad \xi = 0$$

on a :

$$\eta = F(\lambda)^{(1)} = s.$$

La projection définie par cette fonction est symétrique par rapport au méridien central; elle est donc bien de déformation minima le long de cette courbe.

Le développement en série à partir d'une origine située sur le méridien central ($\lambda = \lambda_0, \tau = 0$) est :

$$\eta + i\xi = \eta_0 + F'(\lambda_0)(\Delta\lambda + i\tau) + \frac{1}{2}F''(\lambda_0)(\Delta\lambda + i\tau)^2 + \cdots$$

En particulier, les équations paramétriques du parallèle de latitude croissante (λ_0) sont obtenues en faisant $\Delta\lambda = 0$ dans le développement ci-dessus et en égalant les parties réelles et imaginaires.

$$\begin{cases} \xi = F'(\lambda_0)\,\tau - \frac{1}{6}F'''(\lambda_0)\,\tau^3 + \cdots \\ \eta = -\frac{1}{2}F''(\lambda_0)\,\tau^2 + \frac{1}{24}F^{(IV)}(\lambda_0)\,\tau^4 + \cdots \end{cases} \tag{58}$$

(1) F est donné en fonction de la latitude L par l'intégrale :

$$F = \int_0^L \rho\, dL = \int_0^L \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}\, dL$$

et la latitude croissante λ s'exprime en fonction de la même variable L à l'aide des fonctions élémentaires (formule 55 *bis*).

Les dérivées successives de la fonction F se calculent facilement en partant de la première équation différentielle (57) :

$$F' = \frac{ds}{d\lambda} = \frac{r}{a},$$

$$F'' = \frac{d^2s}{d\lambda^2} = -\frac{r}{a^2}\sin L,$$

$$F''' = \frac{d^3s}{d\lambda^3} = \frac{r}{a^3}\left(\sin^2 L - \frac{N}{\rho}\cos^2 L\right),$$

$$F^{(IV)} = \frac{dF'''}{d\lambda} = \frac{dF'''}{dL}\cdot\frac{dL}{d\lambda} = -\frac{r}{a^4}\sin L\left(\sin^2 L - \frac{N}{\rho}\cos^2 L\right) + \frac{2r}{a^3}\left(\sin L\cos L + \frac{N}{\rho}\cos L\sin L\right)\cdot\frac{r}{a\rho} - \frac{r}{a^3}\cos^2 L\,\frac{d}{dL}\left(\frac{N}{\rho}\right)\cdot\frac{r}{a\rho},$$

en tenant compte de l'équation (25) qui donne la valeur de $\frac{N}{\rho}$, on trouve finalement :

$$F^{(IV)} = -\frac{r}{a^4}\sin^3 L + 5\frac{r}{a^4}\sin L\cos^2 L\cdot\frac{N}{\rho} + \frac{4r}{a^4}\sin L\cos^4 L\cdot\frac{N}{\rho}\cdot e'^2.$$

Sur un parallèle, la deuxième équation différentielle (57) s'intègre facilement puisque le rayon r du parallèle est constant :

$$\tau = \frac{a}{r}t.$$

En remplaçant dans (58) τ par $\frac{at}{r}$, on retrouve les coefficients des équations paramétriques (56) :

$$F'\ (\lambda_0)\cdot\frac{a}{r} = 1,$$

$$-F''\ (\lambda_0)\cdot\frac{a^2}{r^2} = \frac{\sin L}{r} = \frac{\operatorname{tg} L}{N},$$

$$-F'''\ (\lambda_0)\cdot\frac{a^3}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\left(\sin^2 L - \frac{N}{\rho}\cos^2 L\right) = -\left[\left(\frac{\operatorname{tg} L}{N}\right)^2 - \left(\frac{1}{N\rho}\right)\right],$$

$$+F^{IV}\ (\lambda_0)\cdot\frac{a^4}{r^4} = -\frac{\sin^3 L}{r^3} + \frac{5}{r^3}\sin L\cos^2 L\cdot\frac{N}{\rho} + \frac{4}{r^3}\sin L\cos^4 L\cdot\frac{N}{\rho}\cdot e'^2$$

$$= -\left[\left(\frac{\operatorname{tg} L}{N}\right)^3 - 5\left(\frac{\operatorname{tg} L}{N}\right)\cdot\frac{1}{N\rho} - 4e'^2\frac{\sin L\cos L}{N^2\rho}\right].$$

24. Projection Lambert. — Dans le cas particulier de la projection conique de Lambert :

$$z = \frac{\pi}{2}, \qquad c = -\frac{\operatorname{tg} L_0}{N_0},$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{N_0\rho_0}, \qquad \mathfrak{S} = 0, \qquad \mathfrak{T} = 0,$$

$$\mathfrak{V} = \frac{\operatorname{tg} L_0}{N_0^2\rho_0}(1 - 4e'^2\cos^2 L_0), \qquad \mathfrak{V} = 0, \qquad \mathfrak{W} = 0, \qquad \mathfrak{X} = 0.$$

Ces valeurs des coefficients donnent pour les méridiens :

$$(59)\qquad \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = s + \dfrac{1}{6N_0\rho_0}s^3 + \dfrac{\operatorname{tg} L_0}{24N_0\rho_0}(1 - 4e'^2\cos^2 L_0)\,s^4 + \dots \end{cases}$$

et pour le parallèle origine :

$$(60)\qquad \begin{cases} \xi = t - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{\operatorname{tg} L_0}{N_0}\right)^2 t^3 + \dots \\ \eta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\operatorname{tg} L_0}{N_0}\right) t^2 - \dfrac{1}{24}\left(\dfrac{\operatorname{tg} L_0}{N_0}\right)^3 t^4 + \dots \end{cases}$$

En posant :

$$t = \frac{N_0}{\operatorname{tg} L_0}\psi,$$

on voit que ξ et η des formules (60) sont les débuts des développements connus des fonctions sinus et cosinus.

$$\xi = \frac{N_0}{\operatorname{tg} L_0}\sin\psi, \qquad \eta = \frac{N_0}{\operatorname{tg} L_0}(1 - \cos\psi).$$

Ce résultat était à prévoir; la courbure géodésique du parallèle origine $-\dfrac{\operatorname{tg} L_0}{N_0}$ devient la courbure plane de la transformée de $(\mathcal{L})$. Les méridiens en projection sont tous des droites normales à ce cercle, ils convergent donc vers le centre du cercle.

Établissons l'équation différentielle classique de la projection Lambert; nous verrons qu'elle est identique à l'intégrale première (52).

Cette équation différentielle classique s'obtient en écrivant que le rapport de similitude K est le même sur un méridien et sur un parallèle en un point quelconque ; sur un méridien :

$$K = \frac{d\eta}{ds},$$

sur un parallèle qui passe par le point du méridien précédent situé à la distance η en projection du parallèle de base :

$$K = \left(\frac{N_0}{\operatorname{tg} L_0} - \eta\right)\frac{d\psi}{r\,dG},$$

où $d\psi$ est donné par la formule :

$$\frac{N_0}{\operatorname{tg} L_0}\,d\psi = r_0\,dG.$$

L'équation différentielle :

$$(61) \qquad K = \frac{d\eta}{ds} = \left(1 - \frac{\eta \operatorname{tg} L_0}{N_0}\right)\frac{r_0}{r}$$

définit la fonction η en projection Lambert.

Pour obtenir l'équation différentielle en K, il suffit d'éliminer η après avoir effectué une dérivation supplémentaire; l'équation :

$$\frac{dK}{ds} = \frac{K}{r}(\sin L - \sin L_0),$$

obtenue par cette méthode est identique à (52) intégrale première de l'équation générale (51).

Cette équation différentielle (52) peut s'intégrer et on trouve [1] :

$$1 - \frac{\eta \operatorname{tg} L_0}{N_0} = \frac{\left(\operatorname{cotg}\frac{L}{2}\right)^n}{\left(\operatorname{cotg}\frac{L_0}{2}\right)^n} \cdot \frac{\left(\frac{1+e\sin L}{1-e\sin L}\right)^{\frac{ne}{2}}}{\left(\frac{1+e\sin L_0}{1-e\sin L_0}\right)^{\frac{ne}{2}}},$$

avec :

$$n = \sin L_0.$$

Nous allons montrer, en intégrant par développement en série l'équation différentielle (61), que l'expression trouvée pour η (formule 59), par application de la théorie générale pouvait être obtenue aussi par la méthode classique.

Développement en série de $\frac{r_0}{r}$.

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\sin L,$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{2}{r^3}\sin^2 L + \frac{1}{\rho r^2}\cos L,$$

$$\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{6}{r^4}\sin^3 L + \frac{6}{r^3\rho}\sin L\cos L - \frac{1}{r^2\rho^2}\sin L - \frac{1}{r^2\rho^3}\cos L\frac{d\rho}{dL},$$

$$\frac{r_0}{r} = 1 + s\frac{\operatorname{tg} L_0}{N_0} + s^2\left(\frac{\operatorname{tg}^2 L_0}{N_0^2} + \frac{1}{2N_0\rho_0}\right) + s^3\left[\frac{\operatorname{tg}^3 L_0}{N_0^3} + \frac{\operatorname{tg} L_0}{N_0^2\rho_0^2} - \frac{\operatorname{tg} L_0}{6N_0\rho_0} - \frac{1}{6N_0\rho_0^3}\left(\frac{d\rho}{dL}\right)\right]_0 + \dots$$

$$1 - \frac{\eta \operatorname{tg} L_0}{N_0} = 1 - \frac{s\operatorname{tg} L_0}{N_0} - \frac{s^3 \operatorname{tg} L_0}{6N_0^2\rho_0} + \dots$$

Le produit de ces deux développements est :

$$\frac{d\eta}{ds} = 1 + \frac{1}{2N_0\rho_0}s^2 + \left[\frac{\operatorname{tg} L_0}{3N_0^2\rho_0} - \frac{\operatorname{tg} L_0}{6N_0\rho_0^2} + \frac{1}{6N_0\rho_0}\frac{d}{dL}\left(\frac{1}{\rho}\right)_0\right]s^3 + \dots$$

[1] Cf. Traité des Projections, 4e fascicule, par J. Laborde, § 119.

dont l'intégration donne :

$$(62)\qquad \eta = s + \frac{1}{6N_0\rho_0}s^3 + \frac{1}{24}\left[\frac{\operatorname{tg} L_0}{N_0^2\rho_0} + \frac{\operatorname{tg} L_0}{N_0\rho_0}\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{\rho_0}\right) + \frac{1}{N_0\rho_0}\frac{d}{dL}\left(\frac{1}{\rho}\right)_0\right]s^4 + \dots$$

Les quantités $\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{\rho_0}\right)$ et $\frac{d}{dL}\left(\frac{1}{\rho}\right)_0$ s'expriment en fonction de la deuxième excentricité e' :

$$\frac{1}{N_0} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{(1 - e^2\sin^2 L_0)^{\frac{1}{2}}}{a} - \frac{(1 - e^2\sin^2 L_0)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} = -\frac{e^2\cos^2 L_0(1 - e^2\sin^2 L_0)^{\frac{1}{2}}}{a(1 - e^2)}$$

$$= -e'^2\frac{\cos^2 L_0}{N_0}$$

$$\frac{d}{dL}\left(\frac{1}{\rho}\right)_0 = -\frac{3(1 - e^2\sin^2 L_0)^{\frac{1}{2}}}{a(1 - e^2)}e^2\sin L_0\cos L_0 = -3e'^2\frac{\sin L_0\cos L_0}{N_0}.$$

Ce qui démontre l'identité des formules (59) et (62).

Ainsi, les trois projections conformes de Mercator, de Gauss et de Lambert sont des cas particuliers de la projection générale de déformation minima qui a été étudiée. Les coefficients $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$ se déduisent des formules générales qui permettent d'écrire immédiatement dans chaque cas les formules de ces projections jusqu'aux termes du quatrième ordre inclusivement. Ces coefficients fournissent tous les éléments pour le calcul pratique des tables de la projection de Gauss ou de Lambert, en vue des applications géodésiques ou cartographiques.

Les formules développées qui ont été établies diffèrent légèrement des formules classiques : tous les coefficients y sont exprimés rigoureusement en fonction des deux rayons de courbures principaux N et ρ et de la deuxième excentricité e', pour les projections de Lambert et de Gauss, alors que les auteurs classiques donnent des formules dans lesquelles les calculs des coefficients ne sont pas effectués de façon analogue dans les deux projections. C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de reprendre par les méthodes habituelles les deux calculs et de montrer qu'elles peuvent aussi conduire aux résultats fournis directement par la méthode générale.

IV. LA COURBE ($\mathfrak{L}$) EST UNE GÉODÉSIQUE. CARTES AÉRONAUTIQUES.

Si la courbe ($\mathfrak{L}$) est une géodésique quelconque de l'ellipsoïde, sa transformée est une droite sur laquelle les arcs de géodésique se développent en vraie grandeur.

On pourra calculer de proche en proche les intersections de la géodésique avec les méridiens et parallèles qu'elle rencontre et les équations (35′) et (36′) donneront la forme des méridiens et des parallèles ainsi que les points d'intersection en projection de ces lignes.

25. Calcul de la fonction K. — Les coefficients des termes du deuxième ordre sont :

$$\begin{cases} \mathcal{R} = \left(\frac{1}{N\rho}\right)_\xi \sin^2 z_\xi \\ \mathcal{S} = -\left(\frac{1}{N\rho}\right)_\xi \sin z_\xi \cos z_\xi \\ \mathcal{T} = \left(\frac{1}{N\rho}\right)_\xi \cos^2 z_\xi. \end{cases}$$

Pour les coefficients des termes suivants, il suffit de prendre e nul dans les formules (23 *bis*); ce qui donne :

$$\begin{cases} \mathcal{U} = -\frac{4e'^2}{N^2\rho} \sin L \cos L \sin^2 z\,(1 + 2\cos^2 z) \\ \mathcal{V} = +\frac{8e'^2}{N^2\rho} \sin L \cos L \sin z \cos^3 z \\ \mathcal{W} = -\frac{4e'^2}{N^2\rho} \sin L \cos L \cos^2 z\,(1 - 2\sin^2 z) + \frac{\mathcal{R}\,\mathrm{tg}\,L}{N} \\ \mathcal{X} = -\frac{8e'^2}{N^2\rho} \sin L \cos L \sin z \cos^3 z + \frac{3\mathcal{S}\,\mathrm{tg}\,L}{N} \end{cases}$$

les variables L et z ayant les valeurs L_ξ et z_ξ relatives au point courant de la ligne géodésique $(\mathcal{L})$.

Au point de latitude maxima ou minima ou vertex de la géodésique, l'azimut est égal à 90° et la projection est symétrique par rapport au méridien qui passe par ce point.

Pour $z = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\mathcal{R} = \left(\frac{1}{N\rho}\right)_v, \qquad \mathcal{S} = 0, \qquad \mathcal{T} = 0,$$

$$\mathcal{U} = -\left(\frac{4e'^2}{N^2\rho} \sin L \cos L\right)_v, \qquad \mathcal{V} = 0, \qquad \mathcal{W} = \left(\frac{\mathrm{tg}\,L}{N^2\rho}\right)_v, \qquad \mathcal{X} = 0.$$

Le développement en série du rapport de similitude est donc :

$$(64) \qquad K = 1 + \left(\frac{1}{2N\rho}\right)_v \Delta s^2 - \left(\frac{2e'^2 \sin L \cos L}{3N^2\rho}\right)_v \Delta s^3 + \left(\frac{\mathrm{tg}\,L}{2N^2\rho}\right)_v \Delta s\,\Delta t^2 + \dots$$

Les équations du méridien et du parallèle qui passent par ce point sont respectivement :

$$(65) \qquad \begin{cases} \xi = 0 \\ \eta = s + \left(\frac{1}{6N\rho}\right)_v s^3 - \left(\frac{2e'^2 \sin L \cos L}{3N^2\rho}\right)_v s^4 + \dots \end{cases}$$

$$(66) \qquad \begin{cases} \xi = t - \frac{1}{6}\left(\frac{\mathrm{tg}\,L}{N}\right)_v^2 t^3 + \dots \\ \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{tg}\,L}{N}\right)_v t^2 - \frac{1}{24}\left[\left(\frac{\mathrm{tg}\,L}{N}\right)_v^3 + \left(\frac{\mathrm{tg}\,L}{N^2\rho}\right)_v\right] t^4 + \dots \end{cases}$$

26. Comparaison avec la projection Lambert. — Ces résultats et ceux qui ont fait l'objet du paragraphe 24 relatif à la projection Lambert permettent de faire la comparaison entre la projection conforme de déformation minima basée sur une géodésique au voisinage du vertex et la projection Lambert dont le parallèle de base est le parallèle limite de la géodésique considérée.

Pour simplifier le langage, nous désignons dans ce paragraphe ces deux représentations conformes de l'ellipsoïde par (P) pour la projection Lambert et par (Π) pour l'autre projection.

La différence entre les rapports de similitude K(P) et K (Π) est à l'origine des différences entre les deux projections.

Leur valeurs respectives sont :

$$(67)\quad \begin{cases} K\,(P) = 1 + \dfrac{1}{2N_0\rho_0}\,s^2 + \dfrac{\operatorname{tg} L_0}{6N_0^2\rho_0}\,(1 - 4e'^2\cos^2 L_0)\,s^3 + \dots \\ K\,(\Pi) = 1 + \dfrac{1}{2N_0\rho_0}\,s^2 - \dfrac{4e'^2 \sin L_0 \cos L_0}{6N_0^2\rho_0}\,s^3 + \dfrac{3\operatorname{tg} L_0}{6N_0^2\rho_0}\,st^2 + \dots \end{cases}$$

Les surfaces indicatrices des altérations linéaires correspondant à (P) et à (Π) sont osculatrices à l'origine commune; cela résulte du fait que les coefficients des termes du deuxième ordre ne dépendent que de l'azimut z de la tangente; la propriété est un cas particulier de la propriété plus générale suivante :

Deux projections de déformation minima basées sur des courbes tangentes en un point ont en ce point des surfaces indicatrices de déformation osculatrices.

Les termes du troisième ordre sont différents et pour les deux projections envisagées : (P) et (Π), la différence :

$$(68)\qquad K\,(P) - K\,(\Pi) = \frac{\operatorname{tg} L_0}{6N_0^2\rho_0}\,(s^3 - 3st^2)$$

définit dans le plan la correspondance entre les deux projections considérées. Il y a lieu de remarquer que l'excentricité e' n'intervient pas dans la différence.

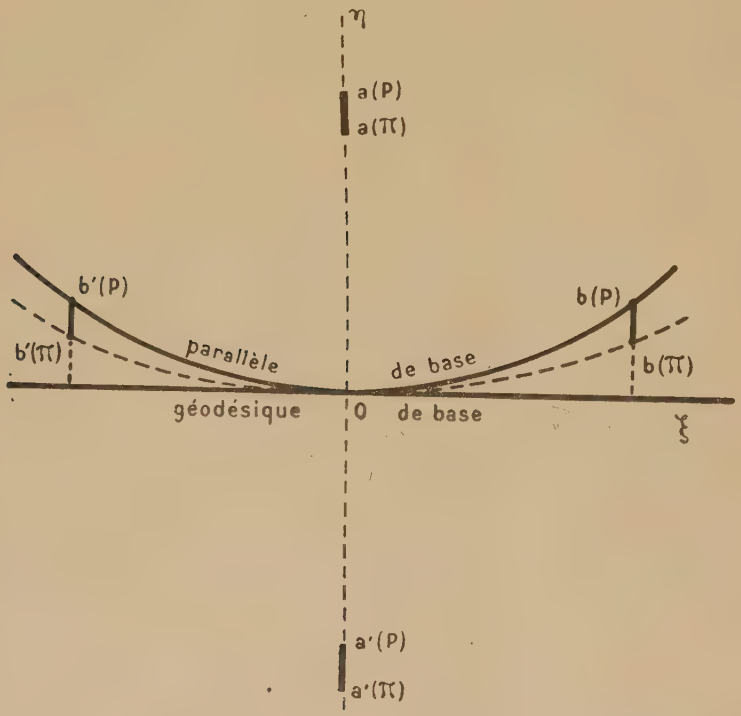
Sur le méridien qui passe par le vertex on a :

$$(69)\quad \begin{cases} \Delta\xi = \xi\,(P) - \xi\,(\Pi) = 0 \\ \Delta\eta = \eta\,(P) - \eta\,(\Pi) = \dfrac{\operatorname{tg} L_0}{24N_0^2\rho_0}\,s^4. \end{cases}$$

La comparaison des équations paramétriques du parallèle qui passe par l'origine donne :

$$(70)\quad \begin{cases} \Delta\xi = \xi\,(P) - \xi\,(\Pi) = 0 \\ \Delta\eta = \eta\,(P) - \eta\,(\Pi) = \dfrac{\operatorname{tg} L_0}{24N_0^2\rho_0}\,t^4. \end{cases}$$

La figure 7 illustre ces résultats : les points A, B, A′, B′, sur l'ellipsoïde sont pris équidistants de l'origine O où les deux courbes de base (géodésique et parallèle) sont tangentes. En projection, les images a (II), a' (II), a (P), a' (P) des points A et A′ sont disposées comme l'indique la figure ; leurs distances a (P) a (II) et a' (P) a' (II) sont égales et données par l'équation (69). Les segments b (P) b (II) et b' (P) b' (II) correspondant aux points B et B′



- fig 7 -

du parallèle qui passe par le vertex sont donnés par les équations (70). Ces quatre segments sont tous égaux aux termes d'ordre supérieur près.

Cet exemple particulier montre de façon concrète l'influence de la courbure géodésique de la courbe de base $(\mathcal{L})$ sur la structure des projections de l'espèce considérée dans ce mémoire.

27. Calcul des points d'intersection de $(\mathcal{L})$ avec les méridiens et les parallèles (1re méthode). — Appelons σ l'arc de géodésique, compté à partir de l'origine L_0G_0 située sur la géodésique, affectons de l'indice L les quantités relatives à l'intersection géodésique-parallèle et de l'indice G celles qui sont relatives à l'intersection géodésique-méridien.

Pour le parallèle, l'abscisse curviligne et la longitude de l'intersection sont :

$$(71)\qquad \begin{cases} \sigma_L = \int_{L_0}^{L} \dfrac{\rho}{\cos z}\, dL \\ G_L = \int_{L_0}^{L} \dfrac{\rho}{r} \operatorname{tg} z\, dL. \end{cases}$$

Pour le méridien, l'abscisse curviligne et la latitude de l'intersection sont :

$$(72)\qquad \begin{cases} \sigma_G = \int_{G_0}^{G} \dfrac{r}{\sin z}\, dG = \int_{G_0}^{G} \dfrac{r^2}{r_0 \sin z_0}\, dG \\ L_G = \int_{G_0}^{G} \dfrac{r}{\rho} \operatorname{cotg} z\, dG. \end{cases}$$

La fonction z est donnée dans les deux cas par la formule de Clairaut :

$$r \sin z = r_0 \sin z_0 \qquad \text{sous forme intégrée}$$

ou

$$dz = -\frac{1}{r}\, dr \operatorname{tg} z \qquad \text{sous forme différenciée.}$$

Le calcul des expressions (71) et (72) sera beaucoup plus facile si on se contente d'un développement jusqu'au troisième ordre à condition de prendre des origines variables sur l'arc de géodésique : on aura ainsi la géodésique entière par segments. Les tables de l'ellipsoïde sont bien adaptées à un calcul de ce genre, car elles fournissent les valeurs des arcs de méridiens de minute en minute et celles des arcs de parallèle d'une minute aux différentes latitudes.

1. *Calcul de* $\Delta\sigma_L$. — On considère le développement de $\dfrac{\rho}{\cos z}$

$$\frac{\rho}{\cos z} = \frac{\rho_0}{\cos z_0} + \frac{d}{dL}\left(\frac{\rho}{\cos z}\right)_0 \Delta L + \frac{d^2}{dL^2}\left(\frac{\rho}{\cos z}\right)_0 \frac{\Delta L^2}{2} + \dots$$

$$\frac{d}{dL}\left(\frac{\rho}{\cos z}\right) = \frac{d\rho}{dL} \cdot \frac{1}{\cos z} + \rho \frac{d}{dL}\left(\frac{1}{\cos z}\right)$$

$$\frac{d^2}{dL^2}\left(\frac{\rho}{\cos z}\right) = \frac{d^2\rho}{dL^2}\frac{1}{\cos z} + 2\frac{d\rho}{dL} \cdot \frac{d}{dL}\left(\frac{1}{\cos z}\right) + \rho \frac{d^2}{dL^2}\left(\frac{1}{\cos z}\right),$$

d'où :

$$\frac{\rho}{\cos z} = \frac{1}{\cos z_0}\left[\rho_0 + \left(\frac{d\rho}{dL}\right)_0 \Delta L + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\rho}{dL^2}\right)_0 \Delta L^2 + \dots\right] + \rho_0 \frac{d}{dL}\left(\frac{1}{\cos z}\right)_0 \Delta L$$
$$+ \left(\frac{d\rho}{dL}\right)_0 \frac{d}{dL}\left(\frac{1}{\cos z}\right)_0 \Delta L^2 + \frac{1}{2}\rho_0 \frac{d^2}{dL^2}\left(\frac{1}{\cos z}\right)_0 \Delta L^2 + \dots$$

L'intégrale du premier terme du développement est l'arc de méridien Δs aux termes d'ordre supérieur près. La formule de Clairaut différenciée permet le calcul des dérivées de $\frac{1}{\cos z}$:

$$\frac{d}{dL}\left(\frac{1}{\cos z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\operatorname{tg}^2 z}{\cos z}\frac{dr}{dL}$$

et, comme $\frac{dr}{dL} = -\rho \sin L$, cela donne :

$$\frac{d}{dL}\left(\frac{1}{\cos z}\right) = \frac{\rho}{r}\frac{\operatorname{tg}^2 z}{\cos z}\sin L$$

$$\frac{d^2}{dL^2}\left(\frac{1}{\cos z}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{3\operatorname{tg}^2 z}{\cos^3 z}\left(\frac{dr}{dL}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{\operatorname{tg}^2 z}{\cos z}\frac{d^2 r}{dL^2}$$

$$= \frac{\rho^2}{r^2}\frac{3\operatorname{tg}^2 z}{\cos^3 z}\sin^2 L + \frac{\rho}{r}\frac{\operatorname{tg}^2 z}{\cos z}\cos L + \frac{1}{r}\frac{\operatorname{tg}^2 z}{\cos z}\sin L\left(\frac{d\rho}{dL}\right).$$

En un point quelconque de la géodésique :

$$(73)\qquad \Delta\sigma \cdot \cos z = \Delta s + \Delta L^2 \frac{\rho^2 \operatorname{tg}^2 z \operatorname{tg} L}{2N}$$

$$+ \Delta L^3\left[\frac{\rho^3 \operatorname{tg}^2 z \operatorname{tg}^2 L}{2N^2 \cos^2 z} + \frac{\rho^2}{6N}\operatorname{tg}^2 z + \frac{\rho}{2N}\operatorname{tg}^2 z \operatorname{tg} L\left(\frac{d\rho}{dL}\right)\right] + \cdots$$

2. *Calcul de* ΔG_L. — On considère le développement de $\frac{\rho}{r}\operatorname{tg} z$:

$$\frac{\rho}{r}\operatorname{tg} z = \frac{\rho_0}{r_0}\operatorname{tg} z_0 + \frac{d}{dL}\left(\frac{\rho}{r}\operatorname{tg} z\right)_0 \Delta L + \frac{d^2}{dL^2}\left(\frac{\rho}{r}\operatorname{tg} z\right)_0 \frac{\Delta L^2}{2} + \cdots$$

$$\frac{d}{dL}\left(\frac{\rho}{r}\operatorname{tg} z\right) = \frac{d}{dL}\left(\frac{\rho}{r}\right)\cdot \operatorname{tg} z + \frac{\rho}{r}\frac{d}{dL}(\operatorname{tg} z)$$

$$\frac{d^2}{dL^2}\left(\frac{\rho}{r}\operatorname{tg} z\right) = \frac{d^2}{dL^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)\cdot \operatorname{tg} z + 2\frac{d}{dL}\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{d}{dL}(\operatorname{tg} z) + \rho\frac{d^2}{dL^2}(\operatorname{tg} z)$$

$$\frac{\rho}{r}\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} z_0\left[\frac{\rho_0}{r_0} + \frac{d}{dL}\left(\frac{\rho}{r}\right)_0 \Delta L + \frac{d^2}{dL^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)_0 \Delta L^2 + \cdots\right] + \frac{\rho_0}{r_0}\frac{d}{dL}(\operatorname{tg} z)_0 \Delta L$$

$$+ \frac{d}{dL}\left(\frac{\rho}{r}\right)_0 \frac{d}{dL}(\operatorname{tg} z_0)\Delta L^2 + \frac{\rho_0}{r_0}\frac{d^2}{dL^2}(\operatorname{tg} z_0)\frac{\Delta L^2}{2} + \cdots$$

On calcule, en tenant compte de l'équation de Clairaut et de

$$\frac{dr}{dL} = -\rho \sin L,$$

les dérivées de $\operatorname{tg} z$:

$$\frac{d}{d\mathrm{L}}(\operatorname{tg} z) = -\frac{1}{r\cos^2 z}\operatorname{tg} z\,\frac{dr}{d\mathrm{L}} = \frac{\rho}{r}\frac{\operatorname{tg} z \sin \mathrm{L}}{\cos^2 z}$$

$$\frac{d^2}{d\mathrm{L}^2}(\operatorname{tg} z) = \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{tg} z}{\cos^4 z}(2+\sin^2 z)\left(\frac{dr}{d\mathrm{L}}\right)^2 - \frac{1}{r}\frac{\operatorname{tg} z}{\cos^2 z}\frac{d^2 r}{d\mathrm{L}^2}$$

$$= \frac{\rho^2 \sin^2 \mathrm{L}}{r^2}\frac{\operatorname{tg} z}{\cos^4 z}(2+\sin^2 z) + \frac{\rho \cos \mathrm{L} \operatorname{tg} z}{r\cos^2 z} + \frac{\sin \mathrm{L} \operatorname{tg} z}{r\cos^2 z}\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{L}}\right).$$

En un point quelconque de la géodésique :

$$(74)\qquad \operatorname{cotg} z \cdot \Delta\mathrm{G}_{\mathrm{L}} = \left[\frac{\rho}{r}\Delta\mathrm{L} + \frac{d}{d\mathrm{L}}\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{\Delta\mathrm{L}^2}{2} + \frac{d^2}{d\mathrm{L}^2}\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{\Delta\mathrm{L}^3}{6} + \cdots\right]$$

$$+ \Delta\mathrm{L}^2\frac{\rho^2 \operatorname{tg} \mathrm{L}}{2\mathrm{N}r\cos^2 z} + \Delta\mathrm{L}^3\left[\frac{\rho^3 \operatorname{tg}^2 \mathrm{L}\,(3+\cos^2 z)}{6\mathrm{N}^2 r\cos^4 z} + \frac{\rho^2 + \rho \operatorname{tg} \mathrm{L}\left(\frac{d\rho}{d\mathrm{L}}\right)}{2\mathrm{N}r\cos^2 z}\right] + \cdots$$

3. *Calcul de* $\Delta\sigma_{\mathrm{G}}$. — On considère le développement de r^2 :

$$r^2 = r_0^2 + \left(\frac{dr^2}{d\mathrm{G}}\right)_0 \Delta\mathrm{G} + \left(\frac{d^2 r^2}{d\mathrm{G}^2}\right)_0 \frac{\Delta\mathrm{G}^2}{2} + \cdots$$

$$\frac{dr^2}{d\mathrm{G}} = 2r\frac{dr}{d\mathrm{G}}$$

$$\frac{d^2 r^2}{d\mathrm{G}^2} = 2\left(\frac{dr}{d\mathrm{G}}\right)^2 + 2r\frac{d^2 r}{d\mathrm{G}^2}.$$

Comme :

$$\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{G}} = \frac{r}{\rho}\operatorname{cotg} z \qquad \text{et} \qquad \frac{dz}{d\mathrm{G}} = \frac{dz}{d\mathrm{L}}\cdot\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{G}} = -\frac{1}{\rho}\frac{dr}{d\mathrm{L}} = \sin \mathrm{L},$$

on a :

$$\frac{dr}{d\mathrm{G}} = -r \sin \mathrm{L} \operatorname{cotg} z$$

$$\frac{d^2 r}{d\mathrm{G}^2} = r\sin^2 \mathrm{L}\operatorname{cotg}^2 z - \frac{r^2}{\rho}\cos \mathrm{L}\operatorname{cotg}^2 z + \frac{r\sin^2 \mathrm{L}}{\sin^2 z}$$

$$r^2 = r_0^2 + 2r_0\left(\frac{dr}{d\mathrm{G}}\right)_0 \Delta\mathrm{G} + r_0\left(\frac{d^2 r}{d\mathrm{G}^2}\right)_0 \Delta\mathrm{G}^2 + \left(\frac{dr}{d\mathrm{G}}\right)_0^2 \Delta\mathrm{G}^2$$

$$\Delta\sigma_{\mathrm{G}} \sin z_0 = \Delta t - r_0 \sin \mathrm{L}_0 \operatorname{cotg} z_0 \,\Delta\mathrm{G}^2$$

$$+ \frac{\Delta\mathrm{G}^3}{3}\left[2r_0 \sin^2 \mathrm{L}_0 \operatorname{cotg}^2 z_0 - \frac{r_0^2}{\rho_0}\cos \mathrm{L}_0 \operatorname{cotg}^2 z_0 + \frac{r_0 \sin^2 \mathrm{L}_0}{\sin^2 z_0}\right] + \cdots$$

En un point quelconque de la géodésique :

$$(75)\qquad \Delta\sigma_{\mathrm{G}} \sin z = \Delta t - r \sin \mathrm{L} \operatorname{cotg} z \,\Delta\mathrm{G}^2$$

$$+ \frac{\Delta\mathrm{G}^3}{3}\left[2r \sin^2 \mathrm{L}\operatorname{cotg}^2 z - \frac{r^2}{\rho}\cos \mathrm{L}\operatorname{cotg}^2 z + \frac{r\sin^2 \mathrm{L}}{\sin^2 z}\right] + \cdots$$

4. *Calcul de* ΔL_G : On considère le développement de $\frac{r}{\rho}\operatorname{cotg} z$:

$$\frac{r}{\rho}\operatorname{cotg} z = \frac{r_0}{\rho_0}\operatorname{cotg} z_0 + \frac{d}{dG}\left(\frac{r}{\rho}\operatorname{cotg} z\right)_0 \Delta G + \frac{d^2}{dG^2}\left(\frac{r}{\rho}\operatorname{cotg} z\right)_0 \frac{\Delta G^2}{2} + \dots$$

Nous intégrerons par parties, en isolant l'expression $\left(\frac{r}{\rho}\right)$ et le facteur $\operatorname{cotg} z$:

$$\Delta L_G = \left[\frac{r_0}{\rho_0}\operatorname{cotg} z_0 \Delta G + \frac{1}{2}\frac{d}{dG}\left(\frac{r}{\rho}\right)_0 \operatorname{cotg} z_0 \Delta G^2 + \frac{1}{6}\frac{d^2}{dG^2}\left(\frac{r}{\rho}\right)_0 \operatorname{cotg} z_0 \Delta G^3\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{r_0}{\rho_0}\frac{d}{dG}(\operatorname{cotg} z)_0 \Delta G^2 + \frac{1}{3}\frac{d}{dG}\left(\frac{r}{\rho}\right)_0 \frac{d}{dG}(\operatorname{cotg} z)_0 \Delta G^3$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{r_0}{\rho_0}\frac{d^2}{dG^2}(\operatorname{cotg} z)_0 \Delta G^3 + \dots ;$$

or :

$$\frac{d}{dG}(\operatorname{cotg} z) = -\frac{\sin L}{\sin^2 z}$$

$$\frac{d^2}{dG^2}(\operatorname{cotg} z) = -\frac{\cos L}{\sin^2 z}\frac{r}{\rho}\operatorname{cotg} z + \frac{2\sin^2 L \cos z}{\sin^3 z}$$

$$\frac{d}{dG}\left(\frac{r}{\rho}\right) = \frac{d}{dL}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{r}{\rho}\operatorname{cotg} z$$

$$\Delta L_G \operatorname{tg} z_0 = \left[\frac{r_0}{\rho_0}\Delta G + \frac{1}{2}\frac{d}{dL}\left(\frac{r}{\rho}\right)_0 \frac{r_0}{\rho_0}\operatorname{cotg} z_0 \Delta G^2 + \frac{1}{6}\frac{d^2}{dG^2}\left(\frac{r}{\rho}\right)_0 \Delta G^3 + \dots\right]$$
$$- \frac{1}{2}\frac{r_0}{\rho_0}\operatorname{tg} z_0 \frac{\sin L_0}{\sin^2 z_0}\Delta G^2 - \frac{1}{3}\frac{d}{dL}\left(\frac{r}{\rho}\right)_0 \frac{\sin L_0}{\sin^2 z_0}\Delta G^3 - \frac{1}{6}\frac{r_0^2}{\rho_0^2}\frac{\cos L_0}{\sin^2 z_0}\Delta G^3$$
$$+ \frac{1}{3}\frac{r_0}{\rho_0}\frac{\sin^2 L_0}{\sin^2 z_0}\Delta G^3 + \dots$$

En un point quelconque de la géodésique :

$$(76)\qquad \Delta L'_G \operatorname{tg} z = \frac{r}{\rho}\Delta G + \frac{d}{dL}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{r}{\rho}\operatorname{cotg} z \frac{\Delta G^2}{2} - \frac{r}{\rho}\frac{\sin L \operatorname{tg} z}{\sin^2 z}\frac{\Delta G^2}{2}$$
$$+ \frac{\Delta G^3}{6}\left\{\frac{d^2}{dL^2}\left(\frac{r}{\rho}\right)\left(\frac{r}{\rho}\operatorname{cotg} z\right)^2 + \left[\frac{d}{dL}\left(\frac{r}{\rho}\right)\right]^2 \frac{r}{\rho}\operatorname{cotg}^2 z - \frac{d}{dL}\left(\frac{r}{\rho}\right)\frac{r\sin L}{\rho \sin^2 z}\right\}$$
$$+ \frac{\Delta G^3}{3}\left[\frac{2r\sin^2 L + \frac{r^2}{\rho^2}\sin L\left(\frac{d\rho}{dL}\right)}{\rho \sin^2 z} - \frac{r^2 \cos L}{2\rho^2 \sin^2 z}\right] + \dots$$

Les quatre formules (73), (74), (75), (76) seront utiles pour le calcul des éléments de la géodésique $(\mathcal{L})$ de proche en proche. Les formules (73), (74) d'intersection avec les parallèles sont plus faciles à appliquer parce qu'elles sont plus simples que les formules (75) et (76) et parce que les azimuts sont plus faciles à calculer par la formule de Clairaut à des latitudes en progression arithmétique.

Aussi, dans toute la zone où la géodésique est inclinée sur les parallèles, les formules (73) et (74) seront seules à appliquer et on déduira par interpolation les abscisses et les latitudes des méridiens. Par contre, pour toute la zone voisine des parallèles limites de la géodésique, il est intéressant de calculer avec les formules (75) et (76) les intersections de la géodésique ($\mathcal{L}$) avec les méridiens.

Cette première méthode n'est applicable pratiquement que pour les projections à champ limité; la seconde méthode qui fait l'objet du paragraphe suivant doit être préférée pour les projections complètes où il est nécessaire de rectifier la géodésique sur toute sa longueur.

28. Calcul des points d'intersection de ($\mathcal{L}$) avec les méridiens et les parallèles (2e méthode). — Une deuxième méthode consiste dans l'application d'un procédé classique[1] utilisé pour le calcul des grands arcs de géodésique. A la latitude L sur l'ellipsoïde, on associe la latitude réduite Λ sur une sphère auxiliaire par la relation :

$$\frac{\operatorname{tg}\Lambda}{\operatorname{tg} L} = \frac{b}{a} = 1 - \alpha = \sqrt{1 - e^2}$$

et on remarque que :

$$\cos\Lambda = \frac{\cos L}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 L}} = \frac{r}{a}.$$

Par suite en un point m quelconque de la géodésique, la relation de Clairaut devient :

$$\cos\Lambda \sin z = \cos\Lambda_0 \tag{77}$$

si l'on désigne par Λ_0 la latitude réduite du vertex de la géodésique considérée. Cela posé, on fait correspondre au point m de l'ellipsoïde de révolution de latitude L et de latitude réduite Λ, un point M de latitude Λ sur la sphère auxiliaire; par ce point M, on fait passer un grand cercle tangent au parallèle de latitude Λ_0 (fig. 8); sur la sphère auxiliaire, les latitudes réduites se confondent avec les latitudes usuelles. Si Z désigne l'azimut du grand cercle considéré au point M, on peut écrire la relation de Clairaut qui se réduit à une formule de trigonométrie sphérique :

$$\cos\Lambda \sin Z = \cos\Lambda_0. \tag{78}$$

La comparaison des formules (77) et (78) montre que les azimuts sont conservés dans la correspondance (m, M) et le vertex d'une géodésique quelconque issue de m aura pour correspondant sphérique le vertex de l'arc de grand cercle issu de M avec le même azimut initial; les deux vertex ont même latitude réduite.

[1] Sur les systèmes géodésiques équilatères à la surface du sphéroïde terrestre, par E. Fichot (*Annales Hydrographiques* de 1921, § 5 et seq.).

Attribuons à la sphère auxiliaire le rayon équatorial a de l'ellipsoïde de révolution; si on appelle s l'arc de grand cercle compris entre M et le vertex, on démontre la formule :

$$(79)\quad \sigma = b\left(1+\nu+\frac{5\nu^2}{4}+\frac{5\nu^3}{4}+\frac{81\nu^4}{64}\right)$$
$$\times\left[\frac{s}{a}+\left(\frac{\nu}{2}-\frac{3\nu^3}{16}\right)\sin 2\frac{s}{a}-\left(\frac{\nu^2}{16}-\frac{\nu^4}{32}\right)\sin 4\frac{s}{a}+\frac{\nu^3}{48}\sin 6\frac{s}{a}-\frac{5\nu^4}{512}\sin 8\frac{s}{a}\right]$$

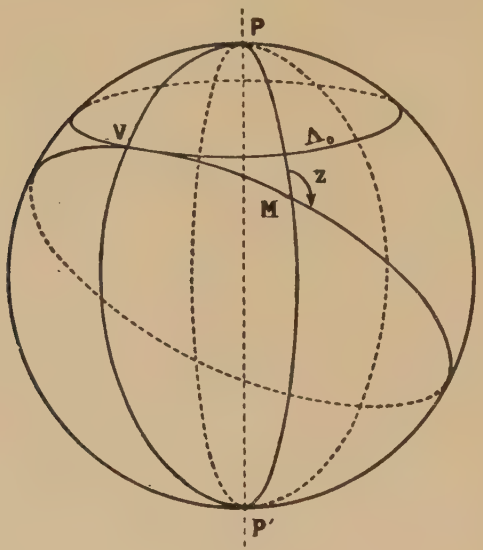


Fig. 8.

où ν, ν^2, ν^3, ν^4 ont les valeurs suivantes pour tous les points d'une même géodésique :

$$\nu = \frac{1}{4}e^2\sin^2\Lambda_0\left(1+e^2-\frac{1}{2}e^2\sin^2\Lambda_0+e^4-e^4\sin^2\Lambda_0+\frac{5}{16}e^4\sin^4\Lambda_0\right.$$
$$\left.+e^6-\frac{3}{2}e^6\sin^2\Lambda_0+\frac{5}{16}e^6\sin^4\Lambda_0-\frac{7}{32}e^6\sin^6\Lambda_0+\ldots\right),$$

$$\nu^2 = \frac{1}{16}e^4\sin^4\Lambda_0\left(1+2e^2-e^2\sin^2\Lambda_0+3e^4-2e^4\sin^2\Lambda_0+\ldots\right),$$

$$\nu^3 = \frac{1}{64}e^6\sin^6\Lambda_0\left(1+3e^2-\frac{3}{2}e^2\sin^2\Lambda_0+\ldots\right),$$

$$\nu^4 = \frac{1}{256}e^8\sin^8\Lambda_0+\ldots$$

Dans les formules précédentes, tous les termes du quatrième ordre par rapport au carré de l'excentricité e^2 sont conservés.

L'arc de grand cercle $\frac{s}{a}$ est donné par la formule :

$$\cos\frac{s}{a} = \frac{\cos\Lambda}{\cos\Lambda_0}.$$

Pour la longitude la formule est :

$$(80)\quad G = g - e^2\cos\Lambda_0\left\{(\mu,\nu)\frac{s}{a} - \frac{\nu}{4}\left[1 - \frac{5\nu^2}{16} - (\mu-\nu)^2 - \nu(\mu-\nu)\right]\sin 2\frac{s}{a}\right.$$
$$\left. + \frac{\nu^2}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{\nu}{16} - \frac{\mu-\nu}{8}\right)\sin 4\frac{s}{a} - \frac{5\nu^3}{192}\sin 6\frac{s}{a}\right\}$$

g est donnée par la relation des sinus :

$$\frac{\sin g}{\sin\left(\frac{s}{a}\right)} = \sin\Lambda.$$

On a d'autre part :

$$\mu = \frac{a-b}{a+b}$$

$$(\mu,\nu) = 1 + \mu - \frac{\nu}{2} - \frac{\nu^2}{4} + \frac{\nu^3}{16} - 3(\mu-\nu)^3 - \frac{\nu}{2}(\mu-\nu)^2 - \frac{3\nu^2}{8}(\mu-\nu)$$
$$- 5\mu\nu(\mu-\nu) + 3(\mu-\nu)(\mu^2+\nu^2).$$

L'azimut est le même sur la sphère auxiliaire et sur l'ellipsoïde. Il est donné par la relation des sinus :

$$\sin z = \frac{\cos\Lambda_0}{\cos\Lambda}.$$

Cette méthode est plus rapide que la précédente et elle présente l'avantage de fournir σ et G pour chaque intersection de parallèle à une distance quelconque du vertex; ce qui empêche les erreurs de s'accumuler comme c'est le cas avec la première méthode.

Pour une géodésique déterminée, les quantités ν, ν^2, ν^3, ν^4, μ et le polynome (μ, ν) ainsi que tous les coefficients des formules (79) et (80) sont constants. Il reste ensuite à calculer pour les différentes valeurs de la latitude L, les latitudes réduites Λ correspondantes, les arcs $\frac{s}{a}$, les angles g et l'azimut z.

Seul l'azimut z est le même sur l'ellipsoïde et sur la sphère auxiliaire. On passe de $\frac{s}{a}$ et g, longueur et longitude réduites sur la sphère, à σ et G, longueur et longitude sur l'ellipsoïde par les formules (79) et (80) dont les coefficients ne dépendent que de la géodésique considérée.

29. Construction de la carte. — Prenons comme origine le vertex de la géodésique de base; nous adoptons comme axe des x la droite trans-

formée de cette géodésique de base; comme la géodésique se développe suivant la droite avec conservation des arcs, les formules établies suivant l'une ou l'autre des méthodes exposées dans les deux paragraphes qui précèdent, définissent un point d'abcisse x sur l'axe des x comme l'image d'un point de coordonnées géographiques L et G de la géodésique de base; de plus, l'azimut z de la géodésique étant connu, les axes ξ et η tangents respectivement au parallèle et au méridien en ce point sont complètement déterminés. Les équations paramétriques (35′) et (36′) fournissent alors le moyen de calculer le canevas de la carte : il suffit de remplacer les coefficients $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$ et $\left(\frac{\operatorname{tg} L}{N}\right)_0$ qui interviennent dans ces formules par leurs valeurs numériques au point d'abcisse x; les équations (35′) donnent la projection du méridien de longitude G et les équations (36′) la projection du parallèle de latitude L. Dans le premier cas, le paramètre est l'arc s de l'ellipse méridienne, dans le second cas, c'est l'arc t du parallèle de latitude L : ces deux paramètres ont été choisis en vue de l'emploi des *Tables de l'Ellipsoïde International* publiées par l'Union Géodésique et Géophysique Internationale, qui donnent, en fonction de la latitude, la longueur s de l'arc de méridien depuis l'équateur et la longueur de l'arc de parallèle compris entre deux méridiens écartés d'une minute en longitude.

30. Rapport de similitude. — Les expressions trouvées pour $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$ donnent la valeur du développement en série du rapport de similitude K en fonction des accroissements Δs et Δt comptés sur le méridien et sur le parallèle qui passent par le point variable M. On a :

$$(81)\quad \mathrm{K} = 1 - \frac{1}{2\mathrm{N}\rho}(\Delta s^2 \sin^2 z - 2\Delta s \Delta t \sin z \cos z + \Delta t^2 \cos^2 z) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg} \mathrm{L} \sin z}{\mathrm{N}\rho}\Delta t^2 (\Delta s \sin z - \Delta t \cos z) + \frac{2}{3}\frac{e'^2}{\mathrm{N}^2\rho}\sin \mathrm{L} \cos \mathrm{L}\,[-\Delta s^3 \sin^2 z (1 + 2\cos^2 z) + 6\Delta s^2 \Delta t \sin z \cos^3 z - 3\Delta s \Delta t^2 \cos^2 z (1 - 2\sin^2 z) - 2\Delta t^3 \sin z \cos^3 z] + \ldots,$$

les quantités N, ρ, L, z doivent être prises pour le point M_0 de la géodésique de base qui est l'origine du développement en série.

On peut adopter un point variable de $(\mathcal{L})$ comme origine et définir un point quelconque m de l'ellipsoïde voisin de $(\mathcal{L})$ en considérant le méridien qui passe par ce point; on prend comme origine l'intersection du méridien avec $(\mathcal{L})$; z sera l'azimut de la courbe $(\mathcal{L})$ par rapport au méridien qui passe par cette origine et le point m peut être défini par la seule coordonnée Δs qui devient ici égale à l'abscisse curviligne s.

L'autre coordonnée Δt est toujours nulle; l'équation (81) devient :

$$(82)\quad \mathrm{K} = 1 + \frac{1}{2\mathrm{N}\rho}s^2 \sin^2 z - \frac{2e'^2}{3\mathrm{N}^2\rho}\sin \mathrm{L} \cos \mathrm{L} \sin^2 z (1 + 2\cos^2 z) s^3 + \ldots$$

Prenons comme origine fixe le point O de la géodésique situé sur le parallèle limite; l'axe Ox est la transformée de la géodésique de base $(\mathcal{L})$ et l'axe Oy le méridien qui passe par le point O, axe de symétrie de la projection. Considérons à l'origine variable sur l'axe $O.x$ l'axe η tangent au méridien et l'axe ξ perpendiculaire (fig. 9).

Des équations du méridien :

$$\xi = -\frac{\mathcal{S}}{6}s^3 - \frac{\mathcal{V}}{24}s^4 + \dots$$

$$\eta = s + \frac{\mathcal{R}}{6}s^3 + \frac{\mathcal{V}}{24}s^4, + \dots,$$

on tire :

$$s - \eta = \frac{\mathcal{R}}{6}\eta^3 - \frac{\mathcal{V}}{24}\eta^4 + \dots$$

et :

$$s^2 = \eta^2 + \text{termes en } \eta^4.$$

En remplaçant s^2 par sa valeur dans (82), on obtient :

$$K = 1 + \frac{1}{2N\rho}\eta^2 \sin^2 z + \frac{2e'^2}{3N^2\rho}\eta^3 \sin L \cos L \sin^2 z\,(1 + 2\cos^2 z).$$

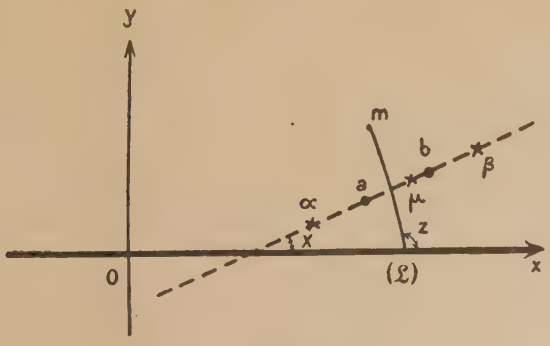
Dans le changement d'axes (x, y), (ξ, η), on a :

$$y = \eta \sin z - \xi \cos z = \eta \sin z + \text{termes en } \eta^3,$$

$$y^2 = \eta^2 \sin^2 z + \text{termes en } \eta^4.$$

La formule (82) se transforme à nouveau et devient :

$$(83) \qquad K = 1 + \frac{1}{2N\rho}y^2 - \frac{2e'^2}{3N^2\rho}y^3 \sin L \cos L \frac{1 + 2\cos^2 z}{\sin z}.$$



- fig. 9 -

Le troisième coefficient peut s'exprimer en fonction de L seul comme le coefficient $\frac{1}{2N\rho}$: en effet, si on néglige e^2 dans le coefficient du troisième ordre qui est déjà très petit par suite de la présence du facteur e'^2, L_0 étant la latitude du parallèle limite, la relation de Clairaut simplifiée :

$$\cos L_0 = \cos L \sin z$$

permet d'éliminer z.

Le coefficient $\frac{1}{2N\rho}$ ne doit pas, par contre, être remplacé par une valeur approchée; si on veut conserver l'approximation de la formule, on prendra :

$$\frac{1}{2N\rho} = \frac{(1 - e^2 \sin^2 L)^2}{2a^2(1 - e^2)}.$$

Finalement, nous avons :

$$(84) \qquad K = 1 + \frac{(1 - e^2 \sin^2 L)^2}{2a^2(1 - e^2)} y^2 - \frac{2e'^2 y^3}{3a^3} \frac{\sin L (3 \cos^2 L - 2 \cos^2 L_0)}{\cos L_0}$$

dans laquelle y est l'ordonnée du point m et L la latitude du point d'intersection du méridien qui passe par m avec la géodésique de base $(\mathcal{L})$.

A titre d'exemple, calculons K dans le cas où le parallèle limite a la latitude 60° et où y est égal à 1/10 du grand axe de l'ellipsoïde : a (Ellipsoïde de référence international).

Dans ce cas particulier, $\sin z = \frac{1}{2 \cos L}$.

Le terme du troisième ordre change de signe soit quand y, soit quand L change de signe. Le maximum de ce terme se produit pour L = 32° environ et il est inférieur à 0,00001. Par suite, la valeur du rapport de similitude ne dépend pratiquement que de l'ordonnée y qui intervient dans la formule (84) par son carré; le coefficient du terme du second ordre varie légèrement avec la latitude; cette variation ne porte dans le cas particulier que sur 5 unités de la dernière décimale.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs du rapport de similitude à différentes latitudes pour une distance y de la géodésique de base égale à $\frac{a}{10}$.

LATITUDE.	VALEUR DE z.	VALEUR DE K.
0°	150°,0	1,00503
10°	149°,5	1,00503
20°	147°,8	1,00502
30°	144°,8	1,00501
40°	139°,2	1,00500
50°	129°,0	1,00499
60°	90°,0	1,00498

Donc à 600 kilomètres de la géodésique de base ($\mathcal{L}$), si on utilise la projection brutalement sans correction d'échelle, l'erreur sur les longueurs est égale à 5 kilomètres pour 1.000 kilomètres, à 500 mètres pour 100 kilomètres. Pour une carte au millionnième, 100 kilomètres sont représentés par 10 centimètres et l'erreur graphique correspondra à un demi-millimètre : pour tous les usages pratiques, il n'y aura pas lieu de faire de correction

31. Courbure de la courbe transformée d'une géodésique. Correction finie. — L'étude de la variation du rapport de similitude dans le champ de la projection n'est pas suffisante pour les usages pratiques de la géodésie ou de la navigation. Le gradient de ce rapport de similitude est souvent plus important que la valeur de ce rapport lui-même parce qu'il a une influence directe sur la courbure de la transformée plane d'une courbe quelconque.

Soit ($\mathcal{C}$) cette courbe tracée sur l'ellipsoïde, nous avons vu que, c étant sa courbure géodésique, la courbure C de la transformée est donnée par la formule (III') du paragraphe 3 :

$$C = \frac{c}{K} - \frac{1}{K^2}\frac{dK}{dn}$$

où $\frac{dK}{dn}$ est la dérivée du rapport de similitude K dans la direction normale à la courbe ($\mathcal{C}$) et dans le sens précisé au paragraphe 3 *in fine*.

Si ($\mathcal{C}$) est une géodésique, $c = o$ et C se réduit à $\frac{1}{K^2}\frac{dK}{dn}$.

Or, il résulte de l'étude faite dans le paragraphe qui précède que, pour la zône utilisable de la projection, les lignes d'égal rapport de similitude sont pratiquement parallèles à l'axe des x; par suite, l'altération de courbure sera maximum dans la direction parallèle Oy et $\left(\frac{dK}{dn}\right)_{max}$ est égal à $\frac{dK}{dy}$ dont la partie principale est $\frac{y}{a^2}$.

Pour la plupart des cas pratiques, cette approximation est grandement suffisante.

Considérons (fig. 9) la géodésique qui joint les points $\alpha\beta$ du plan des xy; appelons χ l'angle de la droite $\alpha\beta$ avec l'axe des x ; en un point μ quelconque de la géodésique :

$$C = \frac{1}{K^2}\frac{dK}{dn} = \frac{1}{K^2}\frac{dK}{dy}\cos\chi = \frac{y}{a^2}\cos\chi,$$

si on néglige les termes d'ordre supérieur. On aura aux points α et en β :

$$\begin{cases} C_\alpha = \frac{y_\alpha}{a^2}\cos\chi \\ C_\beta = \frac{y_\beta}{a^2}\cos\chi. \end{cases}$$

Au point μ, la dérivée de C par rapport à l'arc l de la géodésique qui joint $\alpha\beta$, est :

$$\frac{dC}{dl} = \frac{dC}{dy}\sin\chi = \frac{1}{a^2}\sin\chi\cos\chi.$$

En partant de l'équation intrinsèque, il est facile de trouver l'angle ε que fait la tangente à la géodésique $\alpha\beta$ avec la corde correspondante.

On a, ε_β en appelant ε_α et ε_β les valeurs de cet angle en α et en β :

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha = \dfrac{C_\alpha}{2}l + \dfrac{C'_\alpha}{6}l^2 + \dots \\ \varepsilon_\beta = \dfrac{C_\beta}{2}l - \dfrac{C'_\beta}{6}l^2 \dots \end{cases}$$

si C'_α et C'_β sont les dérivées par rapport à l'arc l des courbures C_α et C_β; en remplaçant C_α, C_β, C'_α, C'_β par leurs valeurs :

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha = \dfrac{y_\alpha}{2a^2}l\cos\chi + \dfrac{1}{6a^2}l^2\sin\chi\cos\chi \\ \varepsilon_\beta = \dfrac{y_\beta}{2a^2}l\cos\chi - \dfrac{1}{6a^2}l^2\sin\chi\cos\chi, \end{cases}$$

or :

$$\begin{cases} l\cos\chi = x_\beta - x_\alpha, \\ l\sin\chi = y_\beta - y_\alpha, \end{cases}$$

donc :

$$(85)\qquad \begin{cases} \varepsilon_\alpha = (x_\beta - x_\alpha)\dfrac{(2y_\alpha + y_\beta)\frac{1}{3}}{2a^2} = \dfrac{(x_\beta - x_\alpha)y_a}{2a^2}, \\ \varepsilon_\beta = (x_\beta - x_\alpha)\dfrac{(2y_\beta + y_\alpha)\frac{1}{3}}{2a^2} = \dfrac{(x_\beta - x_\alpha)y_b}{2a^2}. \end{cases}$$

y_a étant l'ordonnée du point situé au tiers de $\alpha\beta$ à partir de α et y_b l'ordonnée du point situé au tiers de $\alpha\beta$ à partir de β.

Les corrections finies sont maxima si y_α et y_β sont égaux, c'est-à-dire si la géodésique joint des points équidistants de $(\mathcal{L})$. Dans ce cas, les corrections finies sont égales en α et β.

Pour avoir le sens de ces corrections, il n'y a pas lieu d'utiliser de règle de signes compliquée. La courbe $\alpha\beta$ transformée de géodésique tourne toujours sa concavité vers l'axe des x : en effet, la courbe ne pourrait pas, s'il en était autrement, être plus courte que la courbe représentée

par la droite joignant $\alpha\beta$ en projection puisque le rapport de similitude croît toujours quand on s'éloigne de $(\mathcal{L})$.

A titre d'exemple, voyons ce que donnent les formules pour :

$$y_\alpha = y_\beta = \frac{a}{10} = 637{,}8 \text{ km.},$$

$$x_\alpha - x_\beta = \frac{a}{10} = 637{,}8 \text{ km.}$$

On trouve :

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \frac{1}{200} = 0{,}005 \text{ radian, soit } 18 \text{ minutes sexagésimales}$$

et, dans ce cas, la courbe transformée en projection de la géodésique joignant $\alpha\beta$ est un arc de cercle d'angle au centre 36′. La flèche de cet arc (plus grande distance entre l'arc et la corde en projection) est : 800 mètres. A l'échelle du millionnième pour un arc de géodésique de 600 kilomètres dans une zone située à 600 kilomètres de la courbe $(\mathcal{L})$, cela fait une flèche inférieure à 1 kilomètre, c'est-à-dire à 1 millimètre sur la carte. Toute correction graphique est superflue.

32. Courbure de la courbe transformée d'une loxodromie. Différence avec la géodésique. — Si la courbe $(\mathcal{C})$ est une loxodromie, nous avons vu au paragraphe 14 que la courbure c de la loxodromie est donnée par l'équation (30). Si on appelle V l'azimut constant :

$$c = -\frac{\operatorname{tg} L}{N} \sin V$$

et l'application de la formule générale (III) donne pour la courbure de la transformée :

$$C = -\frac{\operatorname{tg} L}{KN} \sin V + \frac{1}{K^2}\left(\frac{\partial K}{\partial s} \sin V - \frac{\partial K}{\partial t} \cos V\right).$$

En un point quelconque A de la projection, considérons la géodésique et la loxodromie issues de ce point et passant par un deuxième point voisin B (fig. 10). Les courbures respectives des deux courbes sont :

$$-\frac{1}{K^2}\frac{dK}{dn} \text{ pour la géodésique,}$$

$$-\frac{\operatorname{tg} L}{KN} \sin V - \frac{1}{K^2}\frac{dK}{dn} \text{ pour la loxodromie,}$$

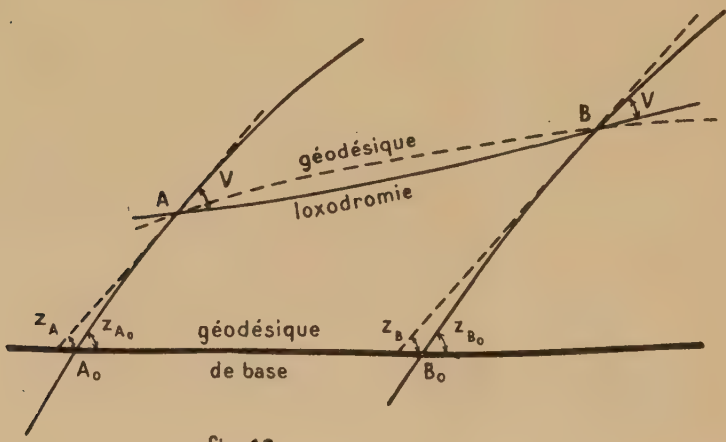
si on admet que les deux points A et B sont suffisamment voisins pour qu'on puisse considérer que les dérivées $\frac{dK}{dn}$ sont identiques.

La correction finie de la géodésique est traitée dans le paragraphe 31.

Il nous reste à donner la correction finie supplémentaire pour passer de la géodésique à la loxodromie. Celle-ci correspond au terme de la courbure : $\frac{\text{tg L}}{\text{KN}} \sin V$.

Nous avons vu au paragraphe 14 que l'intégrale de ce terme est la convergence des méridiens Φ.

Dans le cas particulier où les deux extrémités A et B se trouvent sur la géodésique de base, le terme $\frac{1}{K^2}\frac{dK}{dn}$ est nul et l'intégrale Φ prise entre A_0 et B_0 est égale à $z_{A_0} - z_{B_0}$ différence entre les azimuts des méridiens en



- fig. 10 -

A_0 et B_0. Nous avons une disposition des deux courbes analogue à celle que nous avons considérée au chapitre III pour le calcul de la correction de Givry avec la différence suivante : la géodésique est représentée par la droite A_0B_0 et la loxodromie par une courbe. Comme les deux projections sont conformes, l'angle des deux courbes transformées dans les deux cas est égal à celui que nous avons calculé sur l'ellipsoïde au chapitre III.

Par rapport à la droite AB, l'image de la géodésique est toujours du côté opposé à celui où se trouve la géodésique de base. Quant à la transformée de la loxodromie, elle sera située en général au sud de la droite AB dans l'hémisphère nord et au nord de la droite AB dans l'hémisphère sud. Cette propriété est toujours vraie au sud de la géodésique de base dans l'hémisphère nord et au nord de la géodésique de base dans l'hémisphère sud. Pour les autres parties de la carte, la propriété précédente n'est plus vraie quand, en valeur absolue, la courbure des transformées des géodésiques en projection est supérieure à la courbure géodésique des loxodromies comme cela peut se produire près de l'équateur seulement. En effet, dans la zone équatoriale les géodésiques et les loxodromies sont très voisines tandis que, près des pôles, le terme $\frac{\text{tg L}}{\text{N}} \sin V$

devient prépondérant et les loxodromies s'écartent nettement des géodésiques aussi bien en projection que sur l'ellipsoïde.

La frontière de ces zones correspond aux points de la projection pour lesquels la courbure C s'annule; il existe en réalité une famille de frontières dépendant du paramètre V; considérons le cas particulier où la loxodromie se confond avec le parallèle, on a :

$$V = \frac{\pi}{2}$$

et la frontière a pour équation :

$$\frac{\operatorname{tg} L}{N} = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial s}.$$

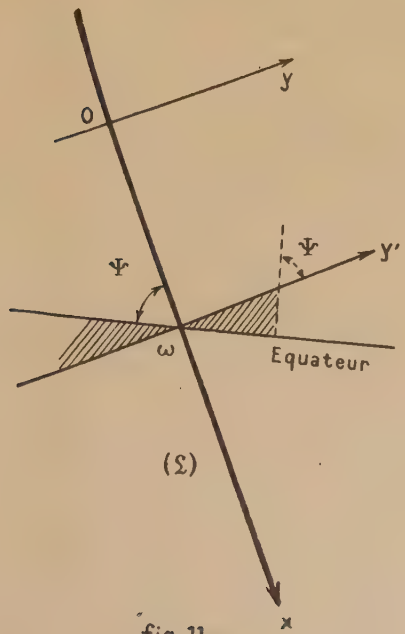
Au voisinage de la courbe $(\mathcal{L})$, on peut confondre la projection de l'équateur avec une droite et les méridiens avec des droites perpendiculaires à l'équateur; si Ψ est l'angle de la géodésique de base $(\mathcal{L})$ avec l'équateur (fig. 11) :

$$\frac{\partial K}{\partial s} = \frac{dK}{dy}\cos\Psi = \frac{y}{a^2}\cos\Psi.$$

Dans ce calcul approché, on doit prendre :

$$K = 1$$

$$\frac{\operatorname{tg} L}{N} = \frac{\operatorname{tg} L}{a}$$



- fig. 11 -

ce qui donne pour équation de la frontière :

$$a \operatorname{tg} L = y \cos \Psi.$$

Les points de la projection qui satisfont à cette équation sont situés sur la droite $\omega y'$.

Les frontières qui correspondent aux valeurs de V différentes de 90° sont situées à l'intérieur de l'angle hachuré.

33. Appllcation aux cartes aéronautiques. — Supposons l'échelle fixée à $\frac{1}{2.000.000}$; 10 kilomètres sont représentés à cette échelle par 5 millimètres.

Nous avons vu qu'à cette échelle, les déformations linéaires et les corrections finies sont négligeables au point du vue cartographique jusqu'à 600 à 700 kilomètres de la géodésique de base. On peut donc envisager de représenter des bandes géodésiques de 1.200 à 1.400 kilomètres de largeur axées sur la géodésique centrale : ce qui donne à l'échelle prévue une largeur de 70 à 75 centimètres, dimension maniable, adaptée aux travaux graphiques usuels.

Cela conduit à adopter comme courbes de base les géodésiques dont les parallèles limites soient espacés de 10 degrés sexagésimaux. La longueur totale d'une géodésique est de 40.000 kilomètres environ; si on admet un mètre comme longueur des feuilles, cela fait 20 feuilles par bande. Le recouvrement minimum aura lieu au voisinage des parallèles limites et les dimensions adoptées ci-dessus lui assurent une valeur de l'ordre de 100 kilomètres.

Au point de vue des calculs, il suffit de calculer dix projections distinctes : la première qui correspondrait à la géodésique confondue avec l'équateur terrestre est la projection de Mercator; la deuxième est basée sur la géodésique dont les parallèles limites sont 10° Nord et 10° Sud; la troisième sur la géodésique de parallèles limites 20° Nord et 20° Sud;... et enfin la dixième se confond avec la projection de Gauss. (Voir planches annexes montrant de façon schématique ces projections.)

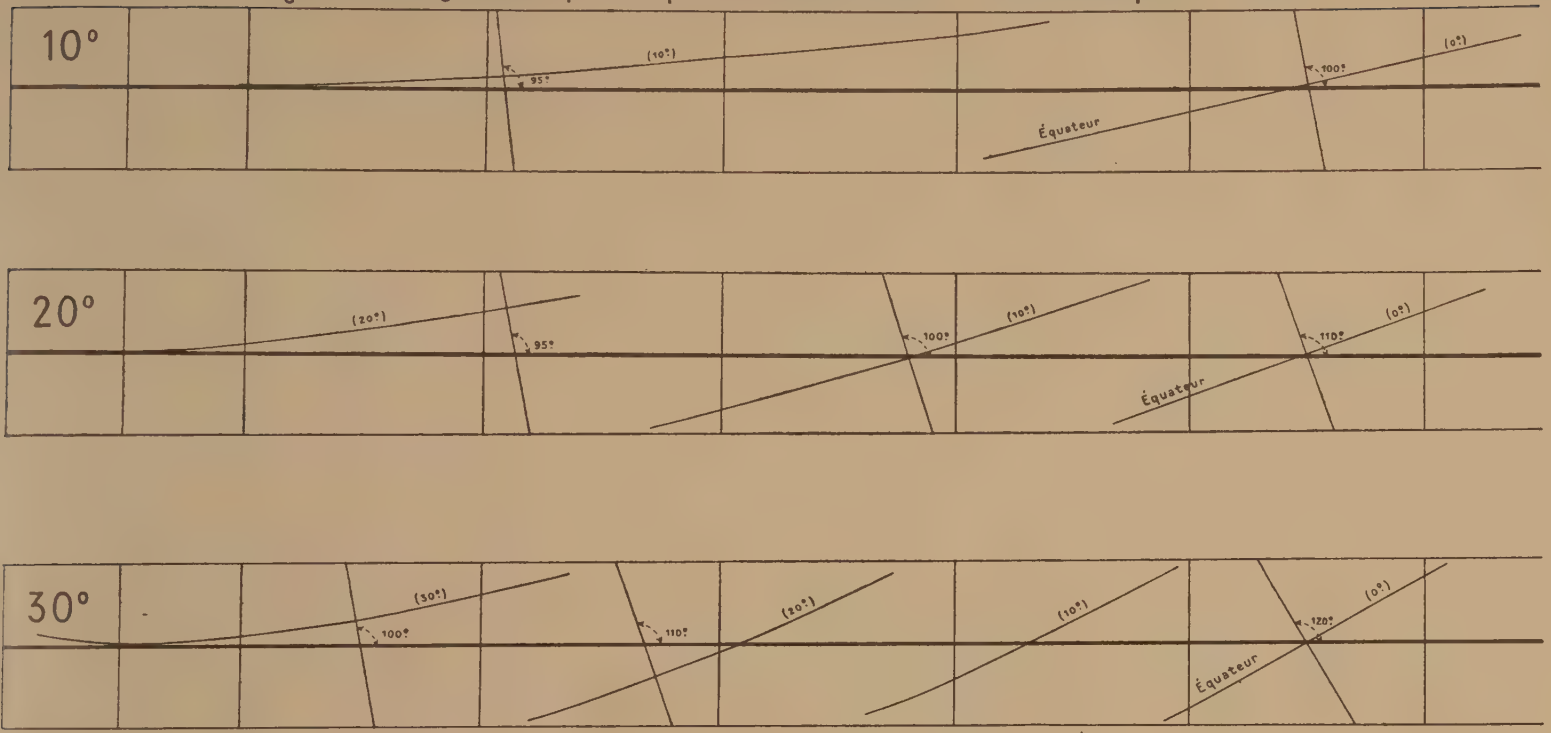
Pour couvrir la surface totale du globe terrestre, il conviendrait de décaler en longitude ces différents ensembles de façon à assurer un recouvrement suffisant au voisinage de l'équateur. Suivant la projection, le décalage angulaire et le nombre d'ensembles nécessaires pour couvrir la zone entière sont donnés par le tableau ci-après.

Pour la projection de Gauss, en effet, après quinze décalages de 12°, la rotation est de 180° et on retrouve la projection initiale.

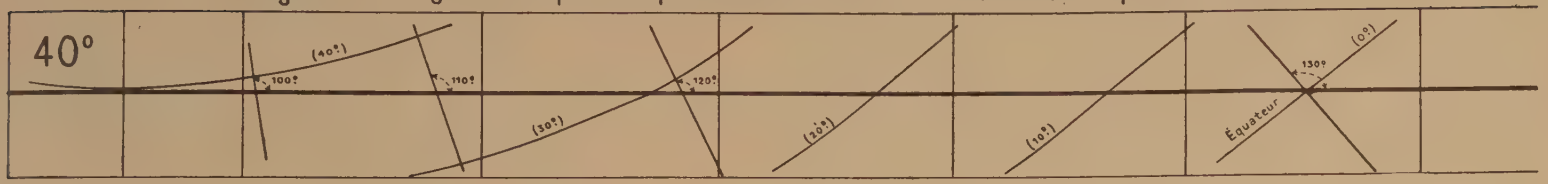
Le nombre des cartes utiles serait théoriquement très élevé : il dépasserait 3.500. Il est, en fait, beaucoup moindre car les itinéraires effectivement utilisés sont très loin de couvrir toute la surface du globe.

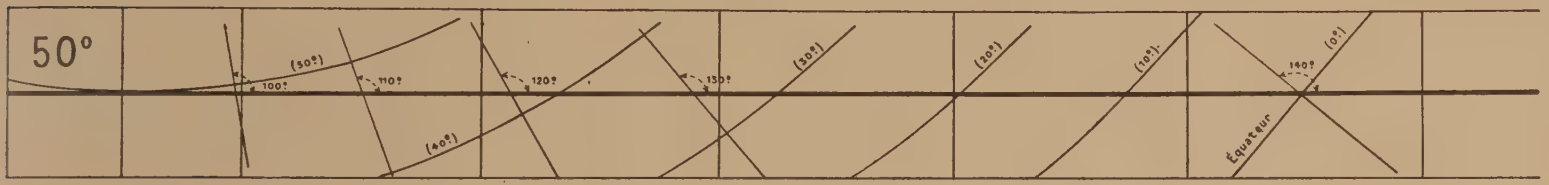
Par contre, les fonds de cartes différents sont au nombre de 186 si on fait abstraction du décalage en longitude. Ils pourraient être utilisés comme abaques pour résoudre les problèmes de navigation en leur affectant les

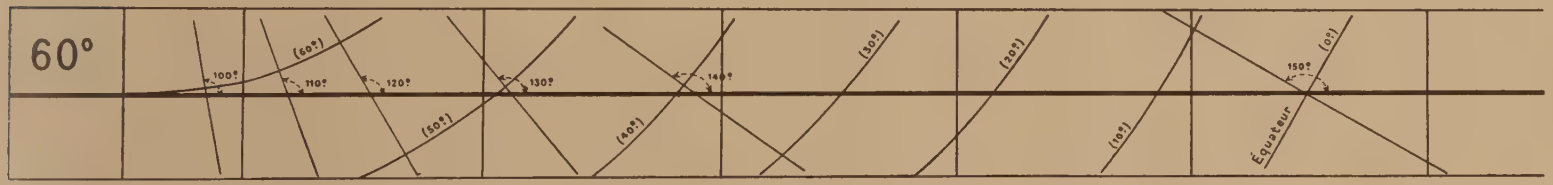
Pl. I - Schéma des projections conformes ayant une géodésique de parallèles limites 10°, 20°, 30° pour base



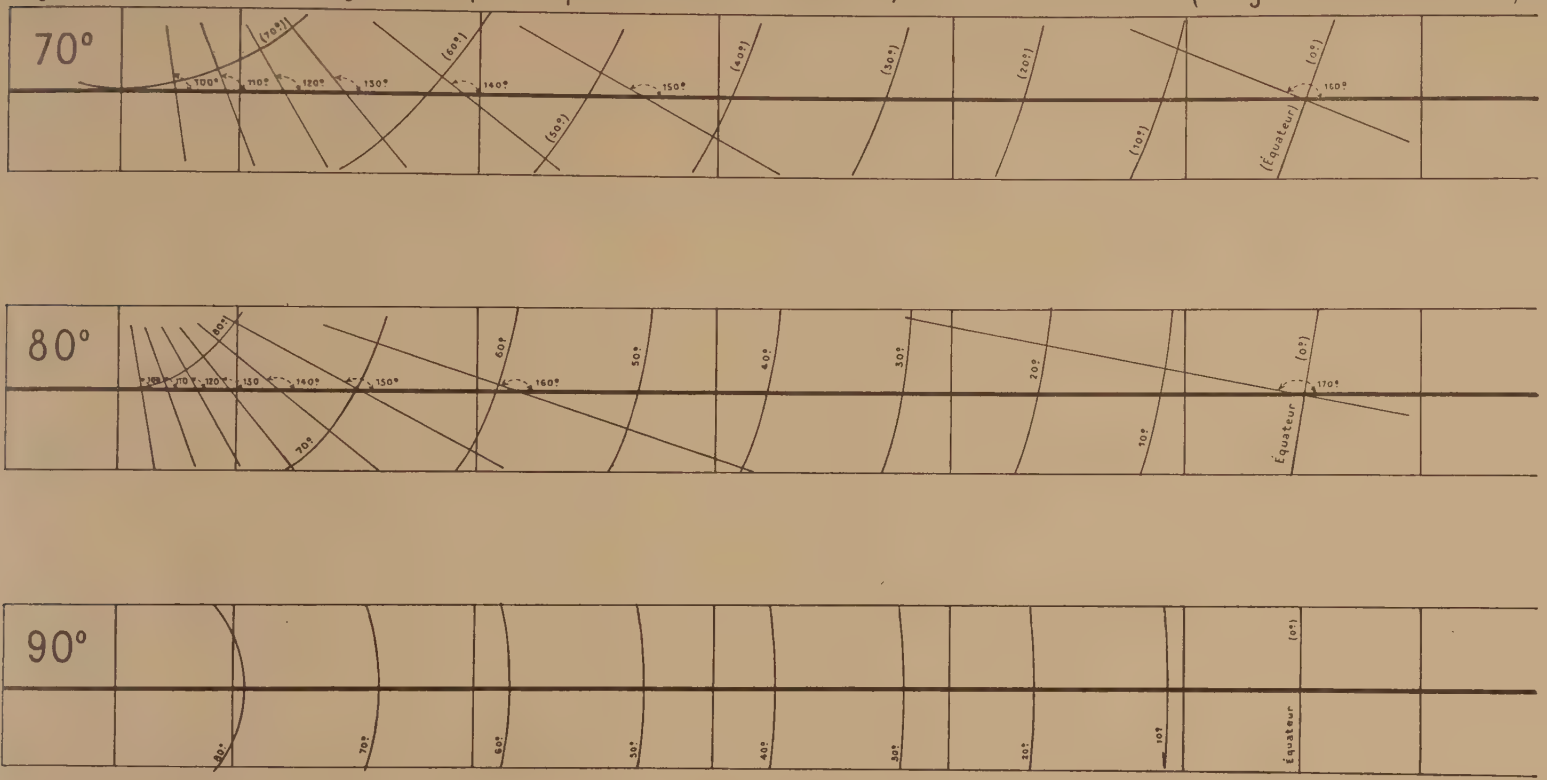
Pl. II - Schéma des projections conformes ayant une géodésique de parallèles limites 40°, 50°, 60° pour base







Pl. III - Schéma des projections conformes
ayant pour base une géodésique de parallèles limites 70°, 80° et un méridien (Projection de Gauss)



LATITUDE DES PARALLÈLES-LIMITES.	DÉCALAGE EN LONGITUDE.	NOMBRE D'ENSEMBLES.
0° (Mercator)	//	1
10°	45°	8
20°	30°	12
30°	22°,5	16
40°	18°	20
50°	15°	24
60°	12°	30
70°	12°	30
80°	12°	30
90° (Gauss)	12°	15

longitudes appropriées au problème considéré. Il suffirait de porter par latitude et longitude les stations de radioguidage et les aérodromes pour que le canevas approprié puisse être utilisé dans une région quelconque du globe.

34. Zone géodésique antipode. — Les géodésiques de l'ellipsoïde ne se referment pas exactement; ainsi, la géodésique qui part du parallèle-limite avec l'azimut 90° ne revient pas exactement à son point de départ. L'étude de ces propriétés des géodésiques a été faite de façon très complète par E. Fichot [1] et P. Gerson [2].

Pour la construction des projections précédentes, on serait conduit à admettre une cassure dans la zone antipode, si on voulait conserver la symétrie par rapport au plan méridien origine ou à l'équateur, si on préférait garder la symétrie des deux hémisphères.

A l'équateur, les deux géodésiques de base correspondant à une bande donnée seraient distantes d'une vingtaine de kilomètres au maximum, si on considère les deux géodésiques issues respectivement d'un point de la surface du globe et de son point antipode. Au point de vue cartographique, ce décalage n'est pas visible même à la limite de la bande envisagée : en effet, à la limite de la bande, la variation du rapport de similitude n'atteindrait que $\frac{1}{3.000}$, c'est-à-dire, au maximum, 0,3 millimètre sur un mètre : ce qui, graphiquement, est négligeable, quand on passe d'une projection à la suivante et, notamment, inférieur au jeu du papier quand on a affaire à deux tirages différents.

[1] E. Fichot. — *Sur les Systèmes Géodésiques Équilatères à la Surface du Sphéroïde Terrestre.* (Extrait des Annales hydrographiques de 1921.)

[2] E. Fichot et P. Gerson. — *La Zone Géodésique Antipode.* (Extrait des Annales hydrographiques de 1937.)

VI. LA COURBE ($\mathcal{L}$) EST QUELCONQUE.

Dans le cas où la courbe de base ($\mathcal{L}$) est une courbe quelconque, on peut appliquer les résultats généraux qui ont été établis dans les chapitres I et II. Au point de vue pratique, on peut envisager deux applications principales :

1° Pour la navigation aérienne : toutes les fois que l'itinéraire diffère notablement de la géodésique, il peut y avoir intérêt à adopter comme courbe de base une courbe autre que la géodésique : c'est le cas par exemple de la route d'Extrême-Orient et des routes aériennes entre l'Amérique du Nord et l'Amérique du Sud.

2° Pour l'hydrographie : la cartographie maritime est intéressante surtout le long des côtes, car c'est en leur voisinage qu'on trouve généralement les récifs dangereux pour la navigation. Pour faire les levés précis de ces zones côtières, il est intéressant d'utiliser une projection qui déforme le moins possible la surface terrestre; la projection théorique la mieux adaptée est la projection conforme de déformation stationnaire qui serait basée sur la courbe moyenne que dessine le littoral.

35. Construction de la projection. — La construction de la projection dans ce cas général comporte, comme pour les cartes aériennes basées sur une géodésique, le calcul précis de la courbe de base et celui des courbes images des méridiens et des parallèles de l'ellipsoïde. Quand la courbe de base est quelconque, il n'existe pas de méthode générale analogue à celle qui fait l'objet du paragraphe 28; par contre, la méthode indiquée au paragraphe 27 reste applicable. Les intersections de ($\mathcal{L}$) avec les parallèles sont données par les intégrales :

$$(86)\qquad \begin{cases} \Delta\sigma_L = \displaystyle\int_{L_0}^{L} \frac{\rho}{\cos z}, \\ \Delta G_L = \displaystyle\int_{L_0}^{L} \frac{\rho}{r} \operatorname{tg} z \, dL \end{cases}$$

et les intersections avec les méridiens par les intégrales :

$$(87)\qquad \begin{cases} \Delta\sigma_G = \displaystyle\int_{G_0}^{G} \frac{r}{\sin z} dG, \\ \Delta L_G = \displaystyle\int_{G_0}^{G} \frac{r}{\rho} \operatorname{cotg} z \, dG \end{cases}$$

analogués aux formules (71) et (72).

Mais, tandis que z était donné par la relation de Clairaut, dans le cas général, z est solution de l'équation différentielle (5') :

$$\frac{dz}{d\sigma} = c + \gamma \cos z - \delta \sin z$$

qui relie la fonction z à la courbure géodésique de ($\mathcal{L}$).

Les formules (86) et (87), appliquées de proche en proche, font correspondre à un point (L, G) de l'ellipsoïde, situé sur la courbe $(\mathcal{L})$, un point d'abscisse curviligne σ sur la courbe projetée $(\mathcal{L})$ dont la courbure plane est égale à la courbure géodésique c.

La connaissance de la fonction z définit, au point courant de la courbe de base en projection, les axes ξ et η tangents respectivement au parallèle et au méridien qui passent par ce point; les équations (35′) et (36′) donnent le moyen de faire correspondre à un point quelconque de l'ellipsoïde de coordonnées géographiques L et G, des coordonnées ξ et η, par deux procédés équivalents : on peut considérer le méridien G qui passe par ce point et prendre l'intersection de ce méridien avec la courbe $(\mathcal{L})$; les Tables de l'Ellipsoïde International fournissent la valeur de l'arc méridien s qui intervient dans les équations (35′); la latitude du point d'intersection du méridien avec $(\mathcal{L})$ est fournie par la deuxième intégrale (87) et sert à calculer tous les coefficients des équations paramétriques (35′). Le deuxième procédé consiste à considérer le parallèle de latitude L et à calculer à l'aide de la deuxième intégrale (86) la longitude de son intersection avec la courbe $(\mathcal{L})$; les Tables de l'Ellipsoïde International fournissent alors la valeur du paramètre t, arc de parallèle qui intervient dans les équations (36′); il suffit de calculer ensuite tous les coefficients de ces équations pour la latitude L. On doit obtenir par les deux procédés le même point en projection, aux termes d'ordre supérieur près qui auront été négligés dans les calculs.

36. Application aux levés hydrographiques. — Dans un mémoire publié en 1912 [1], M. A. Courtier a montré que le système de coordonnées rectangulaires par rabattements de triangles le long de la côte constituait la projection la mieux adaptée aux travaux hydrographiques.

Toutefois, on peut reprocher à ce système empirique de manquer de définition mathématique précise : ce qui est un inconvénient très sérieux pour l'exploitation sûre des calculs géodésiques et pour la définition des méridiens et des parallèles en fonction des coordonnées planes.

Si on adopte comme courbe de base $(\mathcal{L})$, la courbe moyenne définie par la chaîne de triangles côtiers sur laquelle s'appuie le levé hydrographique projeté, on peut substituer à la définition empirique de la projection une définition mathématique précise.

Les calculs des observations faites sur le terrain peuvent être exécutés, en projection plane à condition d'effectuer sur les angles observés rigoureusement pour les triangles principaux les corrections angulaires finies correspondant à l'angle de la corde avec l'image en projection de la géodésique correspondante. Comme la partie utile de la projection est limitée à une bande étroite de 50 à 100 kilomètres, de part et d'autre de la courbe de base, toute correction finie de ce genre est inutile pour

[1] A. Courtier. — *Choix d'un système de représentation pour la rédaction des levés hydrographiques.* (Extrait des Annales hydrographiques de 1912.)

la triangulation secondaire et, *a fortiori*, pour a construction de positions en mer résultant de mesures angulaires. Si on est amené pour une raison quelconque à utiliser la projection à une plus grande distance de la courbe de base, la définition mathématique de la projection donne la possibilité de le faire avec toute la précision désirable. Les procédés modernes de mesure géodésique par les ondes électromagnétiques permettent d'atteindre de longues portées avec grande précision et une projection de déformation stationnaire, adaptée à la forme de la côte, peut constituer un système de représentation convenant à la rédaction de levés hydrographiques précis, étendus vers le large.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

UNICITÉ DE LA SOLUTION ET CALCUL DES ÉLÉMENTS DE LA PROJECTION.

Pages.

1. Expression des courbures géodésiques et de la courbure totale en fonction de μ et de ν 10
2. Courbe tracée sur la surface (Σ) 12
3. Projection conforme de la surface (Σ). — Relations fondamentales 13
4. Position du problème. — Unicité de la solution 16
5. Introduction des variables s et t 17
6. Calcul des opérateurs $\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial v}$ 19
7. Développement en série des courbures géodésiques Γ et Δ 21
8. Calcul des paramètres différentiels de Beltrami 21
9. Surface indicatrice des altérations linéaires 22
10. Calcul de $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ 23
11. Interprétation géométrique 24
12. Calcul de $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{X}$ 25

CHAPITRE II.

CAS DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION.

13. Ellipsoïde de révolution 29
14. Choix de réseau orthogonal. — Convergence des méridiens 30
15. Coefficients du développement en série de K 32
16. Équations des méridiens et des parallèles en projection 33
17. Projection de la courbe $(\mathcal{L})$. — Cas limite où elle se réduit à un point 35

CHAPITRE III.

LA COURBE $(\mathcal{L})$ EST UNE LOXODROMIE.
APPLICATION AU CALCUL DE LA CORRECTION DE GIVRY.

18. Calcul de la correction angulaire de Givry et de la différence de longueur des deux arcs 39
19. Formules trouvées par Givry et Bravais 40
20. Transformation de la formule (40) 41
21. Transformation de la formule (41) 43

CHAPITRE IV.

PROJECTIONS CLASSIQUES.

22. Projection de Mercator 45
23. Projection de Gauss 46
24. Projection de Lambert 48

CHAPITRE V.

LA COURBE ($\mathcal{L}$) EST UNE GÉODÉSIQUE. — CARTES AÉRONAUTIQUES.

Pages.

25. Calcul de la fonction K 52
26. Comparaison avec la projection Lambert 53
27. Calcul des points d'intersection de ($\mathcal{L}$) avec les méridiens et les parallèles (1re méthode) 54
28. Calcul des points d'intersection de ($\mathcal{L}$) avec les méridiens et les parallèles (2e méthode) 59
29. Construction de la carte 61
30. Rapport de similitude 62
31. Courbure de la courbe transformée d'une géodésique. — Correction finie. 65
32. Courbure de la courbe transformée d'une loxodromie. — Différence avec la géodésique 67
33. Application aux cartes aéronautiques 70
34. Zône géodésique antipode 71

CHAPITRE VI.

LA COURBE ($\mathcal{L}$) EST QUELCONQUE.

35. Construction de la projection 72
36. Application aux levés hydrographiques 73

PLANCHES ANNEXES.

Pl. I. Schéma des projections conformes ayant une géodésique de parallèles limites 10°, 20°, 30° pour base 70–1
Pl. II. Schéma des projections conformes ayant une géodésique de parallèles limites 40°, 50°, 60° pour base 70-2
Pl. III. Schéma des projections conformes ayant pour base une géodésique de parallèles limites 70°, 80° et un méridien. (Projection de Gauss) 70–3

Imprimerie Nationale. — J. C. 703395.

DEUXIÈME THÈSE.

Propositions données par la Faculté.

RELATIONS HYDRODYNAMIQUES DANS LES MERS LITTORALES.

APPLICATION AU BASSIN ORIENTAL DE LA MANCHE.

Vu et approuvé :

Paris, le 12 février 1948.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

JEAN CABANNES.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

JEAN SARRAILH.